UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Prof. Dr. Peter von der Lippe
www.von-der-lippe.org

Mängelbeseitigung bei Kettenindizes

Kritik neuer Vorschläge für die Lösung von Problemen mit Kettenindizes

Vortrag in Cottbus (Konferenz "Messen der Teuerung") am 16.7.2009

Gliederung: Beseitigung von drei Mängeln

Kettenindizes sind gut weil

1. Annäherung an superlative Indizes
2. weniger Probleme mit neuen/verschwindenden Gütern
3. Jeweils aktueller (repräsentativer) Warenkorb
4. Keine Probleme mit Wahl des Basisjahres

aber Probleme mit

1. **Chain drift** (nicht transitiv [verkettbar])
   Ivancic, Fox, Diewert (**IFD**)
2. **Volumen** (bei Deflationierung) nicht "additiv"
   Balk, Reich (**BR**)
3. **Warenkorb** nicht jede Periode aktualisiert (wie dann direkter oder Ketten Fisher Index berechnen?)
   Diewert, Huwiler, Kohli (**DHK**)

Die kommentierten Texte

- **IFD** = Lorraine Ivancic, Kevin J. Fox, W. Erwin Diewert, Scanner Data, Time Aggregation and the Construction of Price Indexes,
  May 2009
- **BR** = Bert M. Balk, Utz-Peter Reich,
  Additivity of National Accounts Reconsidered
  June 2007
- **DHK** = W. E. Diewert, M. Huwiler, U. Kohli
  Retrospective Price indices and Substitution Bias
  Oct. 2008

1. **IFD**: Chain drift: Keine Transitivität bei Kettenindizes

Kettenindizes sind **nicht verkettbar** (consistent time aggregation) sondern **pfadabhängig**.

Beispiel Laspeyres Kettenindex

$$\overline{P}_{0t}^{LC} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1} \cdots \frac{\sum p_t q_{t-1}}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \neq P_{0t}^{L} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0}$$

t = 0		t = 1		t = 2		t = 3		t = 4	
p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
2	10	4	12	3	20	1	16	2	10
5	20	3	15	4	10	4	12	5	20

Price oscillation, bouncing

$$P_{04}^{L} = 1$$

$$\overline{P}_{04}^{LC}(a) = P_{02}^{LC} P_{24}^{LC} = 0{,}825$$

$$\overline{P}_{04}^{LC}(b) = P_{1}^{LC} P_{2}^{LC} P_{3}^{LC} P_{4}^{LC} = 0{,}7419$$

Definition und Determinanten der Drift $D_{0t}^{PL} = \overline{P}_{0t}^{LC} / P_{0t}^{L}$

$$D_{02}^{PL} = \frac{\mathrm{Cov}(x_{12}, y_{01})}{\overline{x}_{12} \cdot \overline{y}_{01}} + 1$$

$$x_{i,12} = \frac{p_{i2}}{p_{i1}},\; x_{i,23} = \frac{p_{i3}}{p_{i2}}, \ldots$$

$$y_{i,01} = \frac{q_{i1}}{q_{i0}},\; y_{i,02} = \frac{q_{i2}}{q_{i0}}, \ldots$$

Transitivität, das Thema bei internationalen Vergleichen

- bilateral
  - asymmetric (unbalanced) P^L, P^P
  - symmetric (balanced) P^F, P^{DRO}, P^T
    - Country reversibility test (CRT) nicht erfüllt
    - CRT erfüllt: P^F
      - nicht transitiv (P^F)
      - transitiv
        - weak transitivity CCM
        - strict transitivity (= base land invariance)

$$\hat{P}^F_{AB\,(C)} = P^F_{AC}P^F_{CB} == \sqrt{V_{AB}}\sqrt{\frac{(\mathbf{p}_C'\mathbf{q}_A)\cdot(\mathbf{p}_B'\mathbf{q}_C)}{(\mathbf{p}_A'\mathbf{q}_C)\cdot(\mathbf{p}_C'\mathbf{q}_B)}}$$

$$\hat{P}^F_{AB\,(D)} = P^F_{AD}P^F_{DB} = \sqrt{V_{AB}}\sqrt{\frac{(\mathbf{p}_D'\mathbf{q}_A)\cdot(\mathbf{p}_B'\mathbf{q}_D)}{(\mathbf{p}_A'\mathbf{q}_D)\cdot(\mathbf{p}_D'\mathbf{q}_B)}}$$

$$P^F_{AB} = \sqrt{V_{AB}}\sqrt{\frac{\mathbf{p}_B'\mathbf{q}_A}{\mathbf{p}_A'\mathbf{q}_B}}$$

bloc methods: GK (Geary Khamis),
averaging methods:
EKS (Eltetö - Köves – Szulc) oder
CCD (Caves-Christensen-Diewert)

IFD Terminologie
GEKS statt EKS (= Gini-EKS)
GEKS auch Generalized EKS

Transitive internationale Vergleiche: wie zu erreichen?

Transitivität wenn P_{AB} darstellbar ist als $P_{AB} = P_B/P_A$ (analog Q_{AB})

• average (artificial, central, block) country (GK-method)

• averaging over all binary comparisons (EKS, a full scale closed comparison)

Schwierigkeiten mit EKS

1. Notationen P_{ji}, $P(_{i/j})$,…
2. Viele äquivalente Darstellungen der EKS Formel
3. Herleitung wird nie gezeigt (von GEKS*v.d.L.(2007), S. 555f)

$$\min \Delta(P_1,\ldots,P_m) = \min_{P_1,\ldots,P_m} \sum_i \sum_k g_i g_k \left[\ln\left(P_{ik}^F\right) - \ln\left(P_k/P_i\right)\right]^2 \rightarrow$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial P_i} = 0 \rightarrow$$

$$P_{12}^{GEKS} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\prod_i^m \left(P_{i2}^F\right)^{g_i}}{\prod_i^m \left(P_{i1}^F\right)^{g_i}}$$

* Bei IFD GEKS im Sinne von Gini-EKS,
hier Generalized EKS

Verschiedene Darstellungsweisen der EKS Paritäten

$$P_{kj}^{EKS} = \frac{P_j}{P_k} = \left(\frac{P_{1j}^F}{P_{1k}^F} \frac{P_{2j}^F}{P_{2k}^F} \cdots \frac{P_{mj}^F}{P_{mk}^F} \right)^{1/m} = \left(\prod_l \frac{P_{lj}^F}{P_{lk}^F} \right)^{1/m}$$

$$P_{kj}^{EKS} = \frac{P_j}{P_k} = \left(\frac{P_{k1}^F}{P_{j1}^F} \frac{P_{k2}^F}{P_{j2}^F} \cdots \frac{P_{km}^F}{P_{jm}^F} \right)^{1/m} = \frac{\sqrt[m]{\prod_l P_{kl}^F}}{\sqrt[m]{\prod_l P_{jl}^F}}$$

$$P_{AC}^{EKS} = \left(\frac{P_{AC}^F}{P_{AA}^F} \frac{P_{BC}^F}{P_{BA}^F} \frac{P_{CC}^F}{P_{CA}^F} \right)^{1/3} = \left(\frac{P_{AA}^F}{P_{CA}^F} \frac{P_{AB}^F}{P_{CB}^F} \frac{P_{AC}^F}{P_{CC}^F} \right)^{1/3} = \sqrt[3]{\left(P_{AC}^F\right)^2 P_{AB}^F P_{BC}^F}$$

Als Produkt $$P_{kj}^{EKS} = \sqrt[m]{\prod_l P_{kl}^F \prod_l P_{lj}^F}$$

Zwei Interpretationen

$$P_{AC}^{EKS} = \left[\underbrace{P_{AA}^F P_{AC}^F}_{i=A} \underbrace{P_{AB}^F P_{BC}^F}_{i=B} \underbrace{P_{AC}^F P_{CC}^F}_{i=C} \right]^{1/3} = \sqrt[3]{\left(P_{AC}^F\right)^2 P_{AB}^F P_{BC}^F}$$

$$P_{AC}^{EKS} = \left[\left(P_{AA}^F P_{AB}^F P_{AC}^F\right) \left(P_{AC}^F P_{BC}^F P_{CC}^F\right) \right]^{1/3} = \sqrt[3]{\left(P_{AC}^F\right)^2 P_{AB}^F P_{BC}^F}$$

EKS Preisindex beim zeitlichen Vergleich

Allgemeine Formel $P_{0T}^{EKS} = \left[\left(P_{0T}^{F}\right)^2 \prod_{t \neq 0} P_{0t}^{F} \prod_{t \neq T} P_{tT}^{F} \right]^{1/m}$

<u>Problem 1</u>: P_{st} ist abhängig von Anzahl der Perioden *

Perioden	P_{02} als EKS Preisindex	direct Fisher	chain Fisher
0, 1, 2	$\sqrt[3]{\left(P_{02}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{12}^{F}}$	P_{02}^{F}	$P_{01}^{F} P_{12}^{F}$
0, 1, 2, 3	$\sqrt[4]{\left(P_{02}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{12}^{F} P_{03}^{F} P_{32}^{F}}$	P_{02}^{F}	$P_{01}^{F} P_{12}^{F}$
0,1,2,3,4	$\sqrt[5]{\left(P_{02}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{12}^{F} P_{03}^{F} P_{32}^{F} P_{04}^{F} P_{42}^{F}}$	P_{02}^{F}	$P_{01}^{F} P_{12}^{F}$

- "…when a new period of data becomes available all of the previous period parities must be recomputed" (IFD, p. 22) → vermieden mit RWGEKS
- Rückrechnungsproblem →

Die EKS Paritäten ausgeschrieben

Problem 2: voll ausgeschrieben sind die EKS Paritäten kompliziert und schwer zu interpretieren

Direct Fisher	P_{02}^F	$\sqrt{\frac{p_2'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_2'q_2}{p_0'q_2}}$
Chain Fisher	$P_{01}^F P_{12}^F$	$\sqrt{\frac{p_1'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_1'q_1}{p_0'q_1}\frac{p_2'q_1}{p_1'q_1}\frac{p_2'q_2}{p_1'q_2}}$
EKS (bei 6 Perioden)	In Periode 5 für 2 zurückgerechnet	$P_{02(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{\left(P_{02}^F\right)^2 P_{01}^F P_{12}^F P_{03}^F P_{32}^F P_{04}^F P_{42}^F P_{05}^F P_{52}^F}$

$$\sqrt[6]{\frac{p_2'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_2'q_2}{p_0'q_2}\sqrt{\frac{p_1'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_1'q_1}{p_0'q_1}\frac{p_2'q_1}{p_1'q_1}\frac{p_2'q_2}{p_1'q_2}\frac{p_3'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_3'q_3}{p_0'q_3}\mathrm{Rest}}}$$

Bei m = 6 Perioden 2(12-3) = 18 Brüche

$$\mathrm{Rest} = \frac{p_3'q_2}{p_2'q_2}\frac{p_3'q_3}{p_2'q_3}\frac{p_4'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_4'q_4}{p_0'q_4}\frac{p_2'q_4}{p_4'q_4}\frac{p_2'q_2}{p_4'q_2}\frac{p_5'q_0}{p_0'q_0}\frac{p_5'q_5}{p_0'q_5}\frac{p_2'q_5}{p_5'q_5}\frac{p_2'q_2}{p_5'q_2}$$

2m-3 Indizes, 2(2m-3) Brüche bei Fisher Indizes; bei m = 15 sind das 27 Indizes und 54 Brüche

Probleme mit Fortführung (neue Werte $P_{0t} \to P_{0,t+1}$)

Problem 3: Bei Fortführung der Zeitreihe keine einfache Verkettung

Fortführung bei zunehmender Anzahl der Perioden

$$P^{EKS}_{01(2)} \to P^{EKS}_{02(3)} \to P^{EKS}_{03(4)} \to P^{EKS}_{04(5)} \to P^{EKS}_{05(6)}$$

$$P^{EKS}_{03(4)} = \sqrt[4]{\left(P^{EKS}_{02(3)}\right)^3 \cdot \left(P^{F}_{03}\right)^2 \cdot \frac{P^F_{13}P^F_{23}}{P^F_{01}P^F_{02}}} \qquad P^{EKS}_{04(5)} = \sqrt[5]{\left(P^{EKS}_{03(4)}\right)^4 \cdot \left(P^{F}_{04}\right)^2 \cdot \frac{P^F_{14}P^F_{24}P^F_{34}}{P^F_{03}P^F_{13}P^F_{23}}} \quad \text{usw.}$$

Einfachheit des Kettenindexes geht verloren (Preis für Transitivität)

	Zeitreihe ging bisher bis t = 4	Zeitreihe geht jetzt bis t = 5
4	$P^{EKS}_{04(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{04}\right)^2 P^F_{01}P^F_{14}P^F_{02}P^F_{24}P^F_{03}P^F_{34}}$	hier eine Rückrechnung für t = 4 nötig
5	→	$P^{EKS}_{05(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{05}\right)^2 P^F_{01}P^F_{15}P^F_{02}P^F_{25}P^F_{03}P^F_{35}P^F_{04}P^F_{45}}$

Neuberechnung bisheriger Werte bei Verlängerung der Zeitreihe

Problem 4 ... und Rückrechnung früherer Werte bei Verlängerung der Zeitreihe erforderlich (Formel jedoch nicht sehr kompliziert)

Bisher 5 jetzt 6 Perioden 0, 1,…,5 Neue Elemente $P^F_{05}P^F_{51}$ $P^F_{05}P^F_{52}$, ... usw.

t	Bisher galt (m = 5) **(7 Faktoren)**	Jetzt (m = 6) gilt **(2m-3 = 9 Faktoren)**
1	$P^{EKS}_{01(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{01}\right)^2 P^F_{02}P^F_{21}P^F_{03}P^F_{31}P^F_{04}P^F_{41}}$	$P^{EKS}_{01(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{01}\right)^2 P^F_{02}P^F_{21}P^F_{03}P^F_{31}P^F_{04}P^F_{41}P^F_{05}P^F_{51}}$
2	$P^{EKS}_{02(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{02}\right)^2 P^F_{01}P^F_{12}P^F_{03}P^F_{32}P^F_{04}P^F_{42}}$	$P^{EKS}_{02(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{02}\right)^2 P^F_{01}P^F_{13}P^F_{03}P^F_{32}P^F_{04}P^F_{42}P^F_{05}P^F_{52}}$
3	$P^{EKS}_{03(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{03}\right)^2 P^F_{01}P^F_{13}P^F_{02}P^F_{23}P^F_{04}P^F_{43}}$	$P^{EKS}_{03(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{03}\right)^2 P^F_{01}P^F_{13}P^F_{02}P^F_{23}P^F_{04}P^F_{43}P^F_{05}P^F_{53}}$
4	$P^{EKS}_{04(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{04}\right)^2 P^F_{01}P^F_{14}P^F_{02}P^F_{24}P^F_{03}P^F_{34}}$	$P^{EKS}_{04(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{04}\right)^2 P^F_{01}P^F_{14}P^F_{02}P^F_{24}P^F_{03}P^F_{34}P^F_{05}P^F_{54}}$
5		$P^{EKS}_{05(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{05}\right)^2 P^F_{01}P^F_{15}P^F_{02}P^F_{25}P^F_{03}P^F_{35}P^F_{04}P^F_{45}}$

Formeln werden länger, neue Faktoren für P_{0k}: $P_{0t}P_{tk}$

Rückrechnung bei neuen Zeitreihenwerten

noch Problem 4: Rückrechnung anderer (früherer) Werte

Beispiel t = 5 kommt hinzu (jetzt 6 statt 5 Perioden)

$$P^{EKS}_{01(5)} \leftarrow P^{EKS}_{01(6)}, P^{EKS}_{02(5)} \leftarrow P^{EKS}_{02(6)}, P^{EKS}_{03(5)} \leftarrow P^{EKS}_{03(6)}, P^{EKS}_{04(5)} \leftarrow P^{EKS}_{04(6)}$$

$$\boxed{P^{EKS}_{03(5)} = \sqrt[5]{\left(P^F_{03}\right)^2 P^F_{01} P^F_{13} P^F_{02} P^F_{23} P^F_{04} P^F_{43}}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P^{EKS}_{03(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{03}\right)^2 P^F_{01} P^F_{13} P^F_{02} P^F_{23} P^F_{04} P^F_{43} P^F_{05} P^F_{53}} = \sqrt[6]{(P^{EKS}_{03(5)})^5 P^F_{05} P^F_{53}}}$$

$$\boxed{P^{EKS}_{04(6)} = \sqrt[6]{(P^{EKS}_{04(5)})^5 P^F_{05} P^F_{54}}}$$

when a new period of data becomes available all of the previous period parities must be recomputed

Formeln relativ einfach, wie bei Folie 11

(mindestens) zwei Konzepte von "drift free"

Problem 5: Begriff "drift free" nicht eindeutig (der *wichtigste* Kritikpunkt) (mit RWGEKS kommt noch ein weiteres Konzept von drift-free hinzu)

direct	EKS bei 6 Perioden (0, 1, …, 5)
P_{02}^{F}	$P_{02(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{\left(P_{02}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{13}^{F} P_{03}^{F} P_{32}^{F} P_{04}^{F} P_{42}^{F} P_{05}^{F} P_{52}^{F}}$
P_{03}^{F}	$P_{03(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{\left(P_{03}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{13}^{F} P_{02}^{F} P_{23}^{F} P_{04}^{F} P_{43}^{F} P_{05}^{F} P_{53}^{F}}$
P_{04}^{F}	$P_{04(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{\left(P_{04}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{14}^{F} P_{02}^{F} P_{24}^{F} P_{03}^{F} P_{34}^{F} P_{05}^{F} P_{54}^{F}}$
P_{05}^{F}	$P_{05(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{\left(P_{05}^{F}\right)^2 P_{01}^{F} P_{15}^{F} P_{02}^{F} P_{25}^{F} P_{03}^{F} P_{35}^{F} P_{04}^{F} P_{45}^{F}}$

Beide Spalten müssten als driftfreie (transitive) Reihe gelten (im Unterschied zum chain-Fisher Index [*mit* chain drift])

Rolling window EKS (RWGEKS) ein Ausweg?

Problem 6: Rolling window EKS mit jeweils 3 Perioden
Ist das eine Lösung für: 1) Formel wird immer länger, und 2) keine Rückrechnung früherer Werte erforderlich ??

Rolling (stets 3 Perioden)	EKS bei 6 Perioden (0, 1, …, 5)
$P^{EKS}_{02(RW)} = \sqrt[3]{\left(P^F_{02}\right)^2 P^F_{01} P^F_{12}}$	$P^{EKS}_{02(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{02}\right)^2 P^F_{01} P^F_{13} P^F_{03} P^F_{32} P^F_{04} P^F_{42} P^F_{05} P^F_{52}}$
$P^{EKS}_{13(RW)} = \sqrt[3]{\left(P^F_{13}\right)^2 P^F_{12} P^F_{23}}$	$P^{EKS}_{03(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{03}\right)^2 P^F_{01} P^F_{13} P^F_{02} P^F_{23} P^F_{04} P^F_{43} P^F_{05} P^F_{53}}$
$P^{EKS}_{24(RW)} = \sqrt[3]{\left(P^F_{24}\right)^2 P^F_{23} P^F_{34}}$	$P^{EKS}_{04(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{04}\right)^2 P^F_{01} P^F_{14} P^F_{02} P^F_{24} P^F_{03} P^F_{34} P^F_{05} P^F_{54}}$
$P^{EKS}_{35(RW)} = \sqrt[3]{\left(P^F_{35}\right)^2 P^F_{34} P^F_{45}}$	$P^{EKS}_{05(6)} = \sqrt[6]{\left(P^F_{05}\right)^2 P^F_{01} P^F_{15} P^F_{02} P^F_{25} P^F_{03} P^F_{35} P^F_{04} P^F_{45}}$

EKS und RWGEKS nicht beide "drift free"

Problem 7: EKS und RWGEKS können nicht gleichermaßen drift-frei sein (analog Problem 5). Wird RWGEKS verkettet?

RWGEKS mit 3 Perioden: drift gegenüber direct Fisher und non-rolling mit 6 Perioden.

$P^{EKS}_{02(RW)} / P^{F}_{02} = \sqrt[3]{P^F_{01} P^F_{12} P^F_{20}}$	
$P^{EKS}_{13(RW)} / P^{F}_{03} = \sqrt[3]{P^F_{12} \left(P^F_{13}\right)^2 P^F_{23} \left(P^F_{30}\right)^3}$	$P^{EKS}_{13(RW)} / P^{F}_{13} = \sqrt[3]{P^F_{12} P^F_{23} P^F_{31}}$
$P^{EKS}_{24(RW)} / P^{F}_{04} = \sqrt[3]{P^F_{23} \left(P^F_{24}\right)^2 P^F_{34} \left(P^F_{40}\right)^3}$	$P^{EKS}_{24(RW)} / P^{F}_{24} = \sqrt[3]{P^F_{23} P^F_{34} P^F_{42}}$

Gegenüb. P^F: **kein System erkennbar**

Gegenüber non-rolling: **kein System erkennbar** (nach grüner Linie jeweils 14 Indizes)

$$P^{EKS}_{02(RW)} / P^{EKS}_{02(6)} = \sqrt[6]{P^F_{01} \left(P^F_{02} P^F_{12}\right)^2 P^F_{23} P^F_{24} P^F_{25} P^F_{30} P^F_{31} P^F_{40} P^F_{50}}$$

$$P^{EKS}_{13(RW)} / P^{EKS}_{03(6)} = \sqrt[6]{P^F_{10} \left(P^F_{12}\right)^2 \left(P^F_{13}\right)^3 P^F_{20} P^F_{23} \left(P^F_{30}\right)^2 P^F_{34} P^F_{35} P^F_{40} P^F_{50}}$$

$$P^{EKS}_{24(RW)} / P^{EKS}_{04(6)} = \sqrt[6]{P^F_{10} P^F_{20} \left(P^F_{23}\right)^2 \left(P^F_{24}\right)^3 P^F_{30} P^F_{34} \left(P^F_{40}\right)^2 P^F_{41} P^F_{45} P^F_{50}}$$

Verkettung und Proportionalität bei RWGEKS

Problem 8: Beziehung zwischen aufeinanderfolgenen RWGEKS Werten (*Verkettung*?). Erfüllt RWGEKS *Proportionalität* (und damit Mehrperiodenidentität)?

$$P_{02,RW}^{EKS} \rightarrow P_{13,RW}^{EKS} \rightarrow P_{24,RW}^{EKS} \rightarrow P_{24,RW}^{EKS}$$

$$\boxed{P_{13(RW)}^{EKS} = P_{02(RW)}^{EKS} \sqrt[3]{\left(P_{13}^{F}\right)^{2} P_{23}^{F} / \left(P_{02}^{F}\right)^{2} P_{01}^{F}}} \quad \boxed{P_{24(RW)}^{EKS} = P_{13(RW)}^{EKS} \sqrt[3]{\left(P_{24}^{F}\right)^{2} P_{34}^{F} / \left(P_{13}^{F}\right)^{2} P_{12}^{F}}}$$

Gleiche Preise in 0 und in 4: dann ist

direkter Fisher Index	$P_{04}^{F} = 1$
EKS Perioden 0 bis 6 weil Zeitukehrbarkeit	$P_{04(6)}^{EKS} = \sqrt[6]{P_{01}^{F} P_{14}^{F} P_{02}^{F} P_{24}^{F} P_{03}^{F} P_{34}^{F} P_{05}^{F} P_{54}^{F}} = 1$
rolling window mit Perioden 2, 3, 4 (nur 1 wenn gleiche Preise in **2** und 4)	$P_{24(RW)}^{EKS} = \sqrt[3]{\left(P_{24}^{F}\right)^{2} P_{23}^{F} P_{34}^{F}}$

Beurteilung der IFD-Methode für transitive Kettenindizes

- EKS Methode kompliziert (Kettenindex) und Indizes abhängig von der **Länge des** der Berechnung zugrunde gelegten **Intervalls**

  (Problem 1, 2)

- **Driftfreihe Reihe** der Indizes **nicht mehr eindeutig**: direkt Fisher, GEKS, RWGEKS (RWGEKS eine Lösung? Wird RWGEKS verkettet?)

  (Problem 5, 7)

- **Rückrechnung** bei verlängerter Datenbasis nicht einfach, für Fortführung keine einfache Verkettungsformel

  (Problem 3, 4)

- Verkettung (Fortführung), Proportionalität und Mehrperiodenidentität bei **RWGEKS**-Indizes

  (Problem 6, 8)

2. **BR** (Balk/Reich): Additivität bei Kettenindizes

- Es wird erkannt, dass *beides* unvereinbar ist
  a mathematical <u>impossibility</u> result; between two conflicting goals, realism of the price system … has been accorded over additivity of values yielding coherent national accounts.
- Nur möglich beim direktem Paasche Preisindex als Deflator (v.d.Lippe 2007, S. 344f. Auch bei BR erkannt)
- Mischung aus zwei Arten der Deflationierung
  Lösung: letzte Periode (t) volumenorientiert, alle Perioden davor ein Kettenindex für das Gesamtaggregat (0, t-1)

Deflationierung
- Volumenorientiert $P_1, \ldots, P_K$
- Realwertorientiert (P)

Additivität der Volumen in t

$V_{k,t}$ value ($\Sigma p_t q_t$) des (Sub-) Aggregats k und $V_t = \Sigma V_{k,t}$ insgesamt; k = 1, 2, …, K

	subaggregate k	aggregate (alle K)
Ketten-glied	$P^P_{k,t} = \frac{\mathbf{p}'_{kt}\mathbf{q}_{kt}}{\mathbf{p}'_{k,t-1}\mathbf{q}_{kt}} = \frac{\sum p_{kjt} q_{kjt}}{\sum p_{kj,t-1} q_{kjt}}$	$P^P_t = \frac{\sum\sum p_{kjt} q_{kjt}}{\sum\sum p_{kj,t-1} q_{kjt}} = \left(\sum \frac{1}{P^P_{k,t}} \frac{V_{k,t}}{V_t}\right)^{-1}$
Kette	wird nicht zur Deflatio-nierung benutzt →	$\overline{P}^P_{0,t-1} = \prod_{\tau=1}^{t-1} P^P_\tau$, $\overline{P}^P_{0,t} = P^P_t \overline{P}^P_{0,t-1}$
Deflator	$P^*_{k,0t} = P^P_{k,t} \overline{P}^P_{0,t-1}$	← wird nicht zur Verkettung benutzt

aggregat-spezifisch

nicht aggre-gatspezifisch

Werte (V) und Volumen (Q), Warum Additivität?

Volumen Definition und Additivität

einzelne Volumen	$Q^{BR}_{k,t} = \frac{V_{k,t}}{P^{*}_{k,0t}} = \frac{V_{k,t}}{P^{P}_{k,t}} \frac{1}{\overline{P}^{P}_{0,t-1}} = \frac{V_{k,t}}{P^{P}_{k,t}} C^{-1}_{k}$
Additivität	$\sum_k Q^{BR}_{k,t} = \sum_k \frac{V_{kt}}{P^{*}_{k,0t}} = C^{-1} V_t \sum_k \left(\frac{1}{P^{P}_{k,t}} \frac{V_{kt}}{V_t} \right) = (V_t C^{-1})(P^{P}_{t})^{-1} = \frac{V_t}{\overline{P}^{P}_{0t}}$

Folge der Volumen des Aggregats k: $Q_{k,2}$, $Q_{k,3}$, $Q_{k,4}$ usw.

direkt Paasche Laspeyres Mengen	$\sum_j p_{kj0} q_{kj2}$	$\sum_j p_{kj0} q_{kj3}$	$\sum_j p_{kj0} q_{kj4}$
BR-Deflatio- nierung	$\sum_j p_{kj1} q_{kj2} \big/ \overline{P}^{P}_{01}$	$\sum_j p_{kj2} q_{kj3} \big/ \overline{P}^{P}_{02}$	$\sum_j p_{kj3} q_{kj4} \big/ \overline{P}^{P}_{03}$

Interpretation der Folge der Volumina

Folge der Volumen komplizierter (von 0 bis t-1 allgemeine Preisentwicklung)

Das Verhältnis zweier BR-Volumen (Q_t/Q_{t-1}) "***is a less meaningful measurement tool***"*(p.10). Aber $Q_t/Q_{t-1} - 1$ ist die Wachstumsrate !

Für aufeinander folgende Volumen gilt: **Direct Paasche** (Laspeyres-Volumen Q^L)

Differenz	Quotient (Wachstumsrate)
$Q^L_{kt} - Q^L_{k,t-1} = \sum_j p_{kj0}\left(q_{kjt} - q_{kj,t-1}\right)$	$Q^L_{k,t} \big/ Q^L_{k,t-1} = \sum_j p_{kj0} q_{kj,t} \big/ \sum_j p_{kj0} q_{kj,t-1}$

Mittelwert der q_t/q_{t-1}

Dagegen bei Balk/Reich (BR) gilt

$$Q^{BR}_{kt} - Q^{BR}_{k,t-1} = \sum_j p_{kj,t-1} q_{kj,t} \big/ \overline{P}^P_{0t} - \sum_j p_{kj,t-2} q_{kj,t-1} \big/ \overline{P}^P_{0,t-1}$$

$$\frac{Q^{BR}_{kt}}{Q^{BR}_{k,t-1}} = \frac{\sum_j p_{kj,t-1} q_{kj,t}}{P^P_t \sum_j p_{kj,t-2} q_{kj,t-1}} = \left(\frac{P^P_{k,t}}{P^P_t}\right) \frac{\sum_j p_{kj,t-1} q_{kj,t}}{\sum_j p_{kj,t-1} q_{kj,t-1}}$$

Der *zweite* Faktor ist auch ein Mittelwert der q_t/q_{t-1}

Hier immerhin in Zähler und Nenner gleiche Preise (der Vorperiode)

* Gilt nach BR auch für die Differenz

Zahlenbeispiel zur Demonstration der Nicht-Proportionalität

Ware 1 und 2 = Aggregat A, Ware 3 und 4 = Aggregat B

Deflationierung mit direct Paasche (Laspeyres Volumen)

i	p_{i0}	q_{i0}	p_{i1}	q_{i1}	p_{i2}	q_{i2}
1 2	5 8	10 6	8 10	8 7	5 8	10 6
3 4	3 6	4 8	5 8	6 9	3 6	8 16

Werte

	0	1	2
A	98	134	98
B	60	102	120
Σ	158	236	218

Indizes: direct Paasche

	(P_{01}) t = 1	(P_{02}) t = 2
A	134/96 = 1,396	1
B	102/72 = 1,417	1
Σ	236/168 = 1,405	1

Volumen

	t = 1	t = 2
A	96	98
B	72	120
Σ	168	218

Nicht-Proportionalität bei BR-Deflationierung

Deflationierung nach Art von BR (Balk/Reich)

Grau: was sich nicht verändert hat

Kettenindizes nach Paasche

	(P_{01}) t=0 → t = 1	(P_{12}) t = 1 → t = 2
A	134/96 = 1,396	98/140 = 0,7000
B	102/72 = 1,417	120/168 = 0,7143
Σ	236/168 = 1,405	218/308 = 0,7078

Deflator in Periode 2

A	0,7000*1,405 = 0, 9833
B	0,7143*1,405 = 1,0034
Σ	0,7078*1,405 = 0,9943

$$P^{*}_{k,t} = P^{P}_{k,t}\overline{P}^{P}_{0,t-1}$$

$$\overline{P}^{P}_{0t}$$

Werte

	0	1	2
A	98	134	98
B	60	102	120
Σ	158	236	218

Volumen

	t = 1	t = 2
A	96	99,661
B	72	119,593
Σ	168	219,254

Keine Identität

Variante des Zahlenbeispiels

Andere Preise p_{i1} ceteris paribus

Grau: wie bisher,
blau: neu

i	p_{i0}	q_{i0}	p_{i1}	q_{i1}	p_{i2}	q_{i2}
1 2	5 8	10 6	18 20	8 7	5 8	10 6
3 4	3 6	4 8	15 8	6 9	3 6	8 16

Werte

	0	1	2
A	98	284	98
B	60	168	120
Σ	158	452	218

BR-Deflatoren

A	(98/300)*(452/168) = 0, 8788
B	(120/248)*(452/168) = 1,3018
Σ	(218/548)*(452/168) = 1,0703

P_{01} = 452/168 = 2,6905 große Preissteigerung von 0 bis 1 danach Sinken (32 bzw. 48%) auf das ursprüngliche Niveau

Volumen

	t = 1	t = 2
A	96	111,504
B	72	92,177
Σ	168	203,681

Keine Identität

Beurteilung der BR-Deflationierung

- **Preisindex** (Kettenindex) **und Deflator nicht mehr identisch**
  (aggregatspezifische Indizes werden nicht verkettet, verkettete Indizes werden nicht zur Deflationierung benutzt)
- Absolute Volumen **nicht mit konstanten** individuellen **Preisen** der Basisperiode
  (keine reine Mengenentwicklung)
- Differenzen und Verhältnisse zwischen **aufeinander folgenden Volumen** "less meaningful" (Wachstumsraten!) Komplizierte Formeln.
  Mängel der Interpretation selbst erkannt!
- **Keine Proportionalität** in den Mengen und andere Nachteile der Kettenindizes (Pfadabhängigkeit etc.) bleiben

3. **DHK**: Pseudo-Fisher Indizes bei nicht jährlich neuen Warenkörben

- Was macht man wenn eine Aktualisierung des Warenkorbs nur nach T Perioden erfolgt?* $0,\ldots,t,\ldots,T$
- Problem nicht typisch für Kettenindizes, auch bei direktem Paasche und direktem Fisher Index
- "Pseudo Fisher" Index als "retrospective measure of the price level" (Rückrechnung für Perioden $t < T$)
- es wird hier nicht eingegangen auf die Herleitung. Folge der Pseudo Fisher Indizes (PFI)

$$K = \left(\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{iT}\right)^{-1} \qquad P_{01}^{PFI} = \sqrt{K \sum p_{i1} q_{i0} \sum p_{i1} q_{iT}} \qquad \ldots$$

$$P_{0t}^{PFI} = \sqrt{K \sum p_{it} q_{i0} \sum p_{it} q_{iT}}$$

* etwa T = 5 Jahre

Eigenschaften der Pseudo-Fisher Indizes

das letzte Glied (t = T) der Folge ist gleich dem direkten Fisher Index

$$P_{0t}^{PFI} = \sqrt{K \sum p_{iT} q_{i0} \sum p_{iT} q_{iT}} = \sqrt{\frac{\sum p_{iT} q_{i0} \sum p_{iT} q_{iT}}{\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{iT}}}$$

für die dazwischen liegenden Glieder gilt

Fisher (F)	Pseudo-Fisher (PFI)	quadrierte Drift*
$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_{i1} q_{i0} \sum p_{i1} q_{i1}}{\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{i1}}}$	$P_{01}^{PFI} = \sqrt{\frac{\sum p_{i1} q_{i0} \sum p_{i1} q_{iT}}{\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{iT}}}$	$P_{01(T)}^{LO} / P_{01}^{P}$
$P_{02}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_{i2} q_{i0} \sum p_{i2} q_{i2}}{\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{i2}}}$	$P_{02}^{PFI} = \sqrt{\frac{\sum p_{i2} q_{i0} \sum p_{i2} q_{iT}}{\sum p_{i0} q_{i0} \sum p_{i0} q_{iT}}}$	$P_{02(T)}^{LO} / P_{02}^{P}$

Der zweite Faktor ist der Lowe Preisindex → quadrierte Drift

der erste Faktor ist P^L

Lowe Index mit Gewichten von T

$$P_{0t(T)}^{LO} = \frac{\sum p_{it} q_{iT}}{\sum p_{i0} q_{iT}}$$

* Gegenüber PF: $(P^{PFI}/P^{F})^2$

Drift von PFI

Die quadrierte Drift $(P^{PFI}/P^{F})^2$ kann man beschreiben als Verhältnis zweier Preis-indizes ($p_{i0} \rightarrow p_{iT}$) mit P^{LO}/P^{P} oder als Verhältnis zweier Mengenindizes $q_{it} \rightarrow q_{iT}$

$$\left(\frac{P_{0t}^{PFI}}{P_{0t}^{F}}\right)^2 = \frac{\sum p_{it}q_{iT}}{\sum p_{it}q_{it}} : \frac{\sum p_{i0}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{it}}$$

gilt P^{F} als frei von Drift dann hängt die mit P^{PFI} verbundene Drift von zwei Mengenindizes ab

Drift PFI gegenüber dem *Laspeyres* Preisindex

$$\left(\frac{P_{0t}^{PFI}}{P_{0t}^{L}}\right)^2 = \frac{P_{0t(T)}^{LO}}{P_{0t}^{L}} = \frac{\sum p_{it}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{iT}} : P_{0t}^{L} = \frac{A}{B} : P_{0t}^{L}$$

Zum Vergleich: Drift PFI gegenüber dem *Fisher* Preisindex

$$\left(\frac{P_{0t}^{PFI}}{P_{0t}^{F}}\right)^2 = \frac{P_{0t(T)}^{LO}}{P_{0t}^{P}}$$

Als Verhältnis von Mengenindizes

$$\frac{\sum p_{it}q_{iT}}{\sum p_{it}q_{i0}} : \frac{\sum p_{i0}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{i0}}$$

$q_{i0} \rightarrow q_{iT}$ statt $q_{it} \rightarrow q_{iT}$

Man kann wegen P^{LO} auf quadrierte Bias P^{PFI}/P^{L} und P^{PFI}/P^{F} nicht Theorem von L. v. Bortkiewicz für lineare Indizes anwenden

PFI und anderen Indizes, Verkettung

PFI gegenüber mid-year (= Marshall Edgeworth ME) Index

$$\frac{\sum p_{it}(q_{i0}+q_{iT})}{\sum p_{i0}(q_{i0}+q_{iT})}=\frac{P^{L}_{0t}+A}{1+B} \quad \text{dagegen} \quad P^{PFI}_{0t}=\sqrt{P^{L}_{0t}\frac{\sum p_{it}q_{iT}}{\sum p_{i0}q_{iT}}}=\sqrt{P^{L}_{0t}\frac{A}{B}}$$

Für Drift von PFI gegenüber ME gibt es keinen interpretierbaren Ausdruck

Aufeinanderfolgende Werte von PFI als Ergebnis einer Verkettung

$$\frac{P^{PFI}_{0t}}{P^{PFI}_{0,t-1}}=\sqrt{\frac{\sum p_{it}q_{i0}}{\sum p_{i,t-1}q_{i0}}\frac{\sum p_{it}q_{iT}}{\sum p_{i,t-1}q_{iT}}}=\sqrt{P^{LO}_{t(0)}P^{LO}_{t(T)}}$$

geometrisches Mittel
von zwei Lowe links

Man erhält einen erheblich komplizierten Ausdruck für aufeinanderfolgende Werte von PF (Fisher Index). Es ist insbesondere nicht ein geometrisches Mittel von Laspeyres und Paasche link

Formel nächste Seite

$$\frac{P^{F}_{0t}}{P^{F}_{0,t-1}}\neq\sqrt{P^{L}_{t}P^{P}_{t)}}$$

weitere Interpretation der PFI-Formel

Wie direkter Fisher Index ist der PFI nicht als Messzahlenmittelwert oder als Ausgabenverhältnis zu interpretieren (nur als geometrisches Mittel von zwei Indizes)

Von DHK angebotene Formel mit Ausgabenanteilen s_{i0} und $s_{iT} = p_{iT}q_{iT}/\Sigma p_{iT}q_{iT}$ der Perioden 0 und T

$$\left(P_{0t}^{PFI}\right)^2 = \sum s_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\frac{\sum s_{iT}\dfrac{p_{it}}{p_{iT}}}{\sum s_{iT}\dfrac{p_{i0}}{p_{iT}}} = P_{0t}^{L}\frac{P_{0T}^{P}}{P_{tT}^{P}}$$

Diese Formel läuft mit $C = \Sigma p_T q_T$ hinaus auf

$$\left(P_{0t}^{PFI}\right)^2 = P_{0t}^{L}\frac{A/C}{B/C} = P_{0t}^{L}\frac{A}{B}$$

Formel zur letzten Folie

$$\frac{P_{0t}^{F}}{P_{0,t-1}^{F}} = \sqrt{P_t^L P_t^P P_{t(0)}^{LO}\frac{\sum p_{t-1}q_t}{\sum p_0 q_t}\frac{\sum p_0 q_{t-1}}{\sum p_t q_{t-1}}} \neq \sqrt{P_t^L P_{t)}^P}$$

Beurteilung der DHK-Methode für Pseudo Fisherindizes

- Einleuchtende Methode wenn q_{it} nicht vorhanden
- Index interpretierbar als geometrisches Mittel aus Laspeyres und Lowe Preisindex
  (Preise 0 und t, Mengen T)
- Drift gegenüber Fisher und Laspeyres Preisindex wird bestimmt durch diesen Lowe Preisindex
- Verhältnis zu anderen Indizes nicht einfach zu interpretieren
- Für aufeinanderfolgende Pseudo-Fisher Indizes gibt es eine einfache Verkettungsformel
  (nicht für direkte Fisher Indizes)