Preisindizes mit konstanten Wertgewichten
Bemerkungen zu einem Vorschlag von Werner Neubauer

von

Peter von der Lippe

W. Neubauer hat in verschiedenen Arbeiten[1] zwei Indexformeln vorgeschlagen, die er auch als Antwort auf die verbreitete Kritik am Laspeyres-Index verstanden wissen möchte. In der folgenden Darstellung werden zunächst die Formeln präsentiert und es wird gezeigt, wie Neubauer ihre Verwendung motiviert (Abschn. 1). Sie haben offenbar keine sehr lebhafte wissenschaftliche Diskussion ausgelöst und dürften in der Praxis auch kaum bekannt sein. Der Grund hierfür liegt wohl weniger in einer klaren Erkenntnis formaler Mängel (ob es solche gibt soll in Abschn. 3 untersucht werden), als vielmehr in der offenbar nicht so eingängigen "sachlogischen" Interpretation (Abschn. 2) dieser Formeln.[2]

1. Neubauers zwei Indizes mit konstanten Wertgewichten

Der Index P_{0t}^{HB} (oder $P_{A0,i(0)}$ in Neubauers Schreibweise) ist definiert als harmonisches Mittel der Preismesszahlen gewogen mit den Ausgabenanteilen zur Basiszeit[3]

$$(1) \qquad P_{0t}^{HB} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum \frac{p_0}{p_t} p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_t^*}.$$

Man kann hierin $q_t^* = p_0 q_0 / p_t$ (genauer q_{it}^*) als die Menge der Ware i interpretiert, die man beim Preis p_t für den gleichen Ausgabenbetrag (Wert) p_0q_0 wie zur Basiszeit[4] hätte kaufen können. Es wird also folgende Reaktion auf eine Veränderung des Preises angenommen:

statt Preis p_{i0} jetzt Preis p_{it}	$\rightarrow$	Ausgabe wie bisher p_0q_0, aber Menge q_t^* statt q_0, so dass $q_t^* p_t = q_0 p_0$, mithin auch $\sum q_t^* p_t = \sum q_0 p_0$, *nicht* aber $\sum q_t p_t = \sum q_0 p_0$

Neubauer empfiehlt diese Formel, weil sie unterstellt $(p_t / p_0)(q_t^* / q_0) = k \cdot (1/k) = 1$, oder "Steigen die Preise um den Faktor k, so sinken die impliziten Mengen bei konstant gehaltenen Ausgabebeträgen um den Faktor 1/k" (Neubauer 1999, S.34). Dass nicht Gütermengen sondern Ausgaben konstant gehalten werden hält Neubauer zumindest dann für plausibel, wenn die Haushalte in "Budgets" denken[5]: steigen die Kosten z.B. für den Urlaub, dann wird nicht der gleiche Urlaub wie bisher gemacht und entsprechend mehr hierfür ausgegeben, sondern es wird genauso viel wie bisher ausgegeben, allerdings weniger weit gereist oder weniger lang Urlaub gemacht. Gl. (1) zeigt somit *indirekt* durch Abnahme der Menge (bei gleicher Ausgabe) ein Ansteigen der Preise an, weil $q_t^* < q_0$ mit $p_t / p_0 > 1$ verbunden ist.

---

[1] Die Formeln wurden von W. Neubauer bereits 1966 ins Gespräch gebracht Neubauer (1966), S. 202 - 205, vgl. auch Neubauer (1996), S. 70 – 74, Neubauer (1998), S.54 - 56 und Neubauer (1999), S. 33-36.

[2] Dafür spricht auch, dass man kaum Auseinandersetzungen mit den formalen Eigenschaften dieser Indizes findet. Mängel in dieser Hinsicht dürften also nicht ausschlaggebend für die geringe Beachtung der Formeln sein.

[3] Das Subskript i worüber summiert wird, ist weggelassen worden.

[4] Der "gleiche Wert wie zur Basiszeit" dürfte wohl auch die Namensgebung motiviert haben. Aber ist dieser Wert wirklich konstant? Für den Index von Gl. 2 gilt dies sicher nicht, weil dort jeweils mit der Ausgabe von t statt von 0 verglichen wird. Außerdem: was ist das "Gewicht"? Ist es die Menge in der Aggregatformel, oder der Ausgabenanteil in der Messzahlenmittelwertformel?

[5] oder nach Neubauer (1966), S. 204: mit einem festen Ausgaben- statt einem festen Mengenschema.

Neubauer schreibt zur Interpretation der Formel P_{0t}^{HB}: "Formal ist dies ein reziproker Mengenindex nach Laspeyres ... Steht dieser Index z.B. auf 2 ..., so besagt dies: Das für die Gesamtausgabe ... erhältliche Mengenniveau hat sich halbiert, weil das Preisniveau der betreffenden Güter sich verdoppelt hat." (Neubauer 1999, S. 35). Es ist einsichtig, dass man quasi einen reziproken Mengenindex als Preisindex erhält, wenn man Preissteigerung als Mengenreduktion operationalisiert. Dann ist aber auch $P_{0t}^{HB} = \sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$ ein Preisindex mit Basisperiode 0 und Berichtsperiode t,[6] bei dem offenbar eine Ausgabe zur Zeit 0 durch eine Ausgabe zur Zeit t dividiert wird, statt umgekehrt, wie sonst üblich z.B. bei den Preisindizes von Laspeyres $P_{0t}^{L} = \sum p_t q_0 / \sum p_0 q_0$ oder Paasche $P_{0t}^{P} = \sum p_t q_t / \sum p_0 q_t$.[7] Man kann aber auch[8] P_{0t}^{HB} wie folgt ausdrücken: $P_{0t}^{HB} = \sum p_t q_t^* / \sum p_0 q_t^*$. Das zeigt bereits[9] einige Schwierigkeiten der Interpretation von Preisindizes (was ähnlich, wenn nicht noch mehr auch beim folgenden Preisindex P_{0t}^{PA} gilt), wenn man mit fiktiven Mengen ("Sternchen-Mengen") argumentiert.

Wir bezeichnen die Formel in Gl. 1 als P_{0t}^{HB}, weil hier ein **h**armonisches Mittel (H) mit Ausgabenanteilen der **B**asisperiode (B) gebildet wird. Entsprechend kann man auch das arithmetische Mittel mit Ausgabenanteilen der Berichtszeit bilden, und erhält dann den Index

$$(2) \qquad P_{0t}^{PA} = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} p_t q_t}{\sum p_t q_t} = \frac{\sum p_t q_0^*}{\sum p_t q_t} \qquad \text{(oder in Neubauers Notation } P_{Ai,i(0)}\text{)},$$

der auch, wie Neubauer selbst feststellte, als Index von Palgrave (daher PA) bekannt ist. Auch hier kann man eine fiktive Menge $q_0^* = p_t q_t / p_0$ einführen, wobei q_0^* die Menge ist, die man in Periode 0 konsumiert hätte, wenn man auch in 0 (bei Preisen p_0) den gleichen Ausgabenbetrag ausgegeben hätte wie in t, der Berichtsperiode[10], so dass $p_0 q_0^* = p_t q_t$. Die Idee dabei ist ähnlich, wie im Falle von P_{0t}^{HB}, vielleicht aber noch weniger eingängig[11].

Übersicht 1

Mittel der Preismesszahlen	Ausgabenanteile der Basiszeit	Ausgabenanteile der Berichtszeit
arithmetisch	P_{0t}^{L} (Laspeyres)	P_{0t}^{PA}
harmonisch	P_{0t}^{HB}	P_{0t}^{P} (Paasche)

Es ist kein Zufall, dass aufgrund der generellen Zusammenhänge zwischen arithmetischen und harmonischen Mitteln das Paar P_{0t}^{HB}, P_{0t}^{PA} "time antithetic" (Fisher) ist (ganz ähnlich wie

[6] was beim Preisindex P_{0t} üblicherweise eine Reihenfolge $0 \rightarrow t$ bedeutet.
[7] Wir haben hier in jedem Fall im Zähler eine Ausgabe, die sich auf t bezieht und im Nenner eine Ausgabe der Periode 0. Dabei kann die Ausgabe eine fiktive Ausgabe sein (wie $\Sigma p_t q_0$ oder $\Sigma p_0 q_t$) oder eine tatsächliche Ausgabe (wie $\Sigma p_0 q_0$ oder $\Sigma p_t q_t$).
[8] wie später gezeigt wird, vgl. Gl. 8a in Übers. 2 unten.
[9] Vgl. Abschn. 2 zu weiteren Einzelheiten.
[10] Was die inhaltliche Interpretation betrifft, so ist diese Ausgabe besonders dubios: wie kann man zu einem früheren Zeitpunkt (0) Mengen konsumieren, die sich dadurch definieren, dass sich mit ihnen dann die gleiche Ausgabe $\Sigma p_t q_t$ wie zu einem späteren Zeitpunkt ergibt?
[11] Das zeigt übrigens auch, dass man in der Interpretation der Indizes nicht einfach die zeitliche Reihenfolge vertauschen kann und die Perioden 0 und t als äquivalent betrachten kann, was gern bei der angeblich so wichtigen "Zeitumkehrbarkeit" vergessen wird.

das Paar P_{0t}^{L}, P_{0t}^{P}), denn: $P_{0t}^{HB} = 1/P_{t0}^{PA}$ und $P_{0t}^{PA} = 1/P_{t0}^{HB}$.[12] Bei zwei Arten von Mittelwerten und Ausgabenanteilen muß es neben P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} noch zwei weitere Indizes geben, die jedoch, wie Übers. 1 zeigt, die bekannten Indizes P_{0t}^{P} und P_{0t}^{L} sind. Ferner fällt auf, dass man die Indizes L (Laspeyres) und P (Paasche) auch als harmonisches bzw. arithmetisches Mittel von Preismesszahlen, gewogen mit "hybriden"[13] Ausgabenanteilen $p_t q_0 / \sum p_t q_0$, bzw. $p_0 q_t / \sum p_0 q_t$ darstellen kann. Eine entsprechende doppelte Darstellung mit Ausgabenanteilen (auf der Basis tatsächlicher Mengen), existiert im Falle des HB- und PA-Index jedoch nicht. Man erhält schließlich noch die folgenden Formeln mit hybriden Wägungsschemen

(1a) $$P_{0t}^{AH} = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} p_t q_0}{\sum p_t q_0} > P_{0t}^{L}$$ (AH = arithmetisch hybrid) und

(2a) $$P_{0t}^{HH} = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum \frac{p_0}{p_t} p_0 q_t} < P_{0t}^{P}$$ (HH = harmonisch hybrid).

An ihnen besteht offenbar schon deswegen kein Interesse, weil sie außerhalb des durch die Preisindizes P_{0t}^{P} und P_{0t}^{L} gebildeten Intervalls liegen. Wie man leicht sieht, gilt bei Proportionalität[14] der Mengen $q_{it} = \lambda q_{i0}$ [für alle i = 1,...,n] auch $P_{0t}^{HH} = P_{0t}^{HB}$ und $P_{0t}^{AH} = P_{0t}^{PA}$.

Aufgrund der bekannten Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel gilt schließlich:

(3a) $P_{0t}^{HB} < P_{0t}^{L}$ (Laspeyres) und (3b) $P_{0t}^{PA} > P_{0t}^{P}$ (Paasche).

Es zeigt sich also, dass die beiden von Neubauer wieder in die Diskussion gebrachten Formeln P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} nicht nur eine Messzahlenmittelwertinterpretation besitzen (Übers. 1), sondern auch, dass ihr Wert innerhalb des Intervalls zwischen P_{0t}^{P} und P_{0t}^{L} liegt: es ist ja eine sehr verbreitete Vorstellung, dass im Normalfall gilt $P_{0t}^{P} < P_{0t}^{L}$, und deshalb P_{0t}^{P} "zu klein", P_{0t}^{L} dagegen "zu groß" ausfällt. Aus diesen beiden Gründen sollten sich die beiden Formeln eigentlich einer großen Beachtung und Popularität erfreuen. Dem ist aber offenbar nicht so.[15]

An Größenbeziehungen nach Art von Gl. 3a und 3b kann durchaus (politisches) Interesse bestehen[16]. Allerdings muß nicht notwendig $P_{0t}^{PA} < P_{0t}^{HB}$ gelten, ebensowenig wie $P_{0t}^{P} < P_{0t}^{L}$ gelten muß. Man erhält schließlich *zwei* Ungleichungen

(4a) $P_{0t}^{HB} < DP_{0t}^{L} < P_{0t}^{L} < P_{0t}^{AH}$ und (4b) $P_{0t}^{HH} < P_{0t}^{P} < DP_{0t}^{P} < P_{0t}^{PA}$,

die man nicht ohne weiteres zu einer Ungleichung zusammenfassen kann.[17] Bekanntlich sind geometrische Mittelwerte aus je einem Element der Basis- (4a) und der Berichtsungleichung

[12] Interessant ist, dass jedoch das Paar HB/PA (anders als L/P) nicht auch "factor antithetic" ist.
[13] in der Terminologie von Irving Fisher.
[14] Wir kommen auf diesen Fall noch zurück. Identität ist ein Spezialfall ($\lambda = 1$) der Proportionalität.
[15] Zu den möglichen Gründen vgl. unten Abschn. 2.
[16] Neubauer (1998) bezieht sich vor allem auf die Boskin Kommission, deren Position er (sehr in unserem Sinne) kritisiert und die ganz offensichtlich auf der Suche nach einer Inflationsrate war, die niedriger ausfällt als mit dem bis dato nach der Laspeyres Formel berechneten US-Verbraucherpreisindex.

(4b) ihrerseits wieder prominente Indexformeln, wie etwa $P_{0t}^{F} = \sqrt{P_{0t}^{L} P_{0t}^{P}}$ (Fisher) oder $P_{0t}^{T} = \sqrt{DP_{0t}^{L} DP_{0t}^{P}}$ (Törnquist). Aber

(5) $$P_{0t}^{NN} = \sqrt{P_{0t}^{HB} P_{0t}^{PA}}$$

und $\sqrt{P_{0t}^{AH} P_{0t}^{HH}}$ wären typische "no name" (NN) Indizes. Dabei hätte P_{0t}^{NN} wegen

$\sqrt{P_{0t}^{HB} P_{0t}^{PA}} = \sqrt{\frac{\sum p_t q_0^*}{\sum p_0 q_0^*} \frac{\sum p_t q_t^*}{\sum p_0 q_t^*}}$ eine gewisse Ähnlichkeit mit $P_{0t}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}}$.

Man sollte aber nicht annehmen, dass fiktive (Sternchen-) Mengen tatsächlichen Mengen analog zu interpretieren sind. Nur rein äußerlich besteht z.B. eine Ähnlichkeit zwischen $\sum p_t q_0^*$ und $\sum p_t q_0$ einerseits oder zwischen $\sum p_0 q_0^*$ und $\sum p_0 q_0$ andererseits. Bei genauerem Hinsehen stellt sich aber heraus, dass gilt $\sum p_t q_0^* = \sum \frac{p_t^2 q_t}{p_0}$ (ein komplizierter Ausdruck ganz *ohne* q_0) und $\sum p_0 q_0^* = \sum p_t q_t$. Es fragt sich also, wie im folgenden gezeigt wird, ob "Sternchen-Mengen" wirklich das Verständnis von Indexformeln wie P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} erleichtern, und ob nicht umgekehrt die Beliebtheit von P_{0t}^{L} und P_{0t}^{P} gerade darauf beruht, dass in ihnen nur *tatsächliche*, keine Sternchen-Mengen vorkommen.

2. Interpretation der Indexformeln als Ausgabenverhältnisse

Die mangelnde Beliebtheit von P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} ist wohl auch darauf zurückzuführen, dass die Interpretation als Verhältnisse von Ausgaben (Aggregaten) mit *fiktiven* Mengen in den "Aggregatformeln" $\sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$ und $\sum p_t q_0^* / \sum p_t q_t$ (Gl. 1 und 2) Probleme aufwirft, denn diese lassen nicht unbedingt an einen Preisindex denken, der ja wohl eher so aussieht

(6) $$P_{0t}^{*} = \sum p_{it} g_i / \sum p_{i0} g_i \,,$$

worin die Größen g_i "Gewichte" darstellen, etwa die Mengen q_{i0} (bei P_{0t}^{L}) oder q_{it} (bei P_{0t}^{P}). Die ungewöhnliche Form von $P_{0t}^{HB} = \sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$ und $P_{0t}^{PA} = \sum p_t q_0^* / \sum p_t q_t$ lässt viele wohl auch eher an einen Mengenindex denken, weil die Preise in Zähler und Nenner ja jeweils gleich sind. Neubauer vergleicht deshalb auch P_{0t}^{HB} mit einem reziproken Mengenindex von Laspeyres Q_{0t}^{L} und P_{0t}^{PA} mit $\left(Q_{0t}^{P}\right)^{-1}$, was aber wohl die Akzeptanz seiner Formeln als *Preis*indizes nicht gesteigert haben dürfte. Man könnte annehmen, dass P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} deshalb so wenig Beachtung gefunden haben, weil sie 1. sich nicht (oder nur sehr gekünstelt[18]) als Verhältnisse von Ausgaben interpretieren lassen, und weil sie 2. als Preisindizes die Gestalt von reziproken Mengenindizes haben. Dem ist aber entgegenzuhalten, dass

[17] In den beiden Ungleichungen tauchen auch noch Indizes DP^L und DP^P auf, die als *geometrische* Mittel der Preismesszahlen gewogen mit Ausgabenanteilen der Basisperiode [DP^L, der "logarithmic Laspeyres index", bei Neubauer $P_{G0,i(0)}$] bzw. der Berichtsperiode [DP^P, der "logarithmic Paasche index"] definiert sind.
[18] mit "Sternchen - Mengen", nicht aber mit *tatsächlichen* Mengen.

- der so beliebte Index von Fisher P_{0t}^{F} weder eine Messzahlenmittelwert- noch eine Ausgabeninterpretation besitzt[19] (während es bei P_{0t}^{L} und P_{0t}^{P} immerhin *beide* Interpretationen und bei P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} zumindest erstere gibt), und dass,
- wie Neubauer feststellte, in den Indizes P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} in Zähler und Nenner nur die Mengen gleich sind (q_0 in Gl.1, also bei P_{0t}^{HB} und q_t bei P_{0t}^{PA}), nicht aber die Preise, so dass man hier nur von Preis-, nicht von *Mengen*indizes sprechen kann[20] und
- dass man schließlich auch die "traditionellen" Indexformeln von Laspeyres und Paasche so (als reziproke Mengenindizes) darstellen könnte, denn es gilt (vgl. Übers. 2)

  (7a) $P_{0t}^{L} = \sum p_t q_0 / \sum p_t q_t^*$ in Analogie zu $P_{0t}^{HB} = \sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$, und

  (7b) $P_{0t}^{P} = \sum p_0 q_0^* / \sum p_0 q_t$ analog zu $P_{0t}^{PA} = \sum p_t q_0^* / \sum p_t q_t$.

In dieser Form erkennt man allerdings die üblichen Gegenüberstellungen von Ausgaben (alternativ berechnet mit Preisen p_t und mit Preisen p_0) in P_{0t}^{L} und P_{0t}^{P} nicht mehr wieder. Gl. 7a und 7b entsprechen mithin nicht dem gewohnten Interpretationsmuster von P_{0t}^{L} und P_{0t}^{P} und folglich ist auch nicht zu erwarten, dass die analogen Gleichungen, nämlich Gl. 1 für P_{0t}^{HB} und Gl. 2 für P_{0t}^{PA} sehr viel mehr Anklang finden.[21]

Facit: 1. Es ist nicht per se problematisch, Preissteigerung indirekt als implizite Mengenreduktion ($q_t^* < q_0$) bzw Mengensteigerung ($q_0^* > q_t$) operationalisieren zu wollen[22], und es ist 2. anzuerkennen, dass die Indizes P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} als Mittelwerte von Messzahlen auch große Vorteile haben[23], nicht zuletzt auch wegen der Größenrelationen der Gl. 3a und 3b (bzw. 4a und 4b).

Aber die Vielfalt der Darstellungsmöglichkeiten (vgl. Übers. 2), die sich bei Preisindizes ergibt, wenn man mit fiktiven (Sternchen-) Mengen operiert ist eher verwirrend als erhellend, führt sie doch zu Problemen der Interpretation, auf die z. T. bereits hingewiesen wurde:

- $P_{0t}^{HB} = \sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$ legt, wie gesagt, den Gedanken nahe, dass hier anders als sonst üblich, eine Ausgabe zur Zeit 0 durch eine Ausgabe zur Zeit t dividiert wird oder ein reziproker Mengenindex $\left(Q_{0t}^{L}\right)^{-1}$ vorliegt. Dagegen ähnelt P_{0t}^{HB} gem. Gl. 8a eher dem Index P_{0t}^{P}. Und entsprechend kann man bei P_{0t}^{PA} fragen: wurde hier wegen $\sum p_t q_t$ im Nenner (gem. Gl. 2) die zeitliche Reihenfolge der Perioden vertauscht, also $t \to 0$ (statt $0 \to t$), wobei dann aber eigentlich P_{t0}^{PA} statt P_{0t}^{PA} zu schreiben wäre, oder liegt ein In-

[19] Das gleiche gilt auch für die nicht weniger beliebten Kettenindizes, die ebenso *trotz* dieses Mangels von vielen als das non plus ultra empfunden werden (vgl. zur Gegenposition Neubauer 1995 und v. d. Lippe 2000)

[20] Diese Aussage (das einzige, worin sich Zähler und Nenner unterscheiden sind die Preise) wäre auch eine Art, "reinen Preisvergleich" zu definieren (vgl. unten Nr. 1 in Abschn. 3d), nicht nur ein Kriterium um Preis- und Mengenindizes zu unterscheiden.

[21] Man kann übrigens auch umgekehrt für die "*neuen*" Formeln P^{HB} und P^{PA} Darstellungen finden die den traditionellen Präsentationen der Formeln von Laspeyres und Paasche entsprechen (siehe Gl. 8a und 8b in Übers. 2).

[22] Es wird sich jedoch zeigen (Abschn. 3e), dass es nicht leicht sein dürfte, die für Preisindizes gegebene Interpretation analog auf Mengenindizes zu übertragen (mit entsprechend fiktiven Preisen und gleichen Mengen, statt Preisen in Zähler und Nenner).

[23] vgl. unten Abschn. 3c für eine ganz bedeutsame Konsequenz der Mittelwerteigenschaft.

dex nach Art von $\left(Q_{0t}^{P}\right)^{-1}$ vor, oder wegen Gl. 8b ein Preisindex, der analog zu P_{0t}^{L} konstruiert ist, nur eben mit fiktiven (q_0^*) statt mit tatsächlichen Mengen (q_0)?

- Wegen $\sum p_t q_0^* = \sum p_t^2 q_t / p_0$ und $\sum p_0 q_0^* = \sum p_t q_t$ in Zähler und Nenner von P_{0t}^{PA} (gem. Gl. 8b) ist es übrigens fraglich ob sich die Ausgaben wirklich auf t und 0 beziehen (entsprechende Vorsicht ist beim Vergleich von Gl. 8a mit P_{0t}^{P} geboten).

Übersicht 2

Formel	Preise gleich, Mengen verschieden	Preise verschieden, Mengen gleich
Laspeyres	(7a) $P_{0t}^{L} = \sum p_t q_0 / \sum p_t q_t^*$	$P_{0t}^{L} = \sum p_t q_0 / \sum p_0 q_0$
Paasche	(7b) $P_{0t}^{P} = \sum p_0 q_0^* / \sum p_0 q_t$	$P_{0t}^{P} = \sum p_t q_t / \sum p_0 q_t$
HB	(1) $P_{0t}^{HB} = \sum p_0 q_0 / \sum p_0 q_t^*$	(8a) $P_{0t}^{HB} = \sum p_t q_t^* / \sum p_0 q_t^*$
PA	(2) $P_{0t}^{PA} = \sum p_t q_0^* / \sum p_t q_t$	(8b) $P_{0t}^{PA} = \sum p_t q_0^* / \sum p_0 q_0^*$

Aus der rechten Spalte ergeben sich auch zusätzliche Messzahlenmittelwertformeln:

Mittel	Ausgabenanteile in HB	Ausgabenanteile in PA
arithmetisch	(8a) $p_0 q_t^* / \sum p_0 q_t^*$	(2) $p_t q_t / \sum p_t q_t$
harmonisch	(1) $p_0 q_0 / \sum p_0 q_0$	(8b) $p_0 q_0^* / \sum p_0 q_0^*$

- Es ist auch zu beachten, dass 0 eine, t aber eine Vielzahl von Perioden darstellt: die Vorstellung, dass sich die Mengen q_{i0}^* in der "Basisausgabe" $\sum p_0 q_0^*$ (anders als im *konstanten* Warenkorb $\sum p_0 q_0$ in P_{0t}^{L}) in P_{0t}^{PA} (gem. Gl. 8b) laufend ändert ist ziemlich absurd. Danach sind die Mengen q_0^* wie folgt bestimmt: $q_0^* = p_1 q_1 / p_0$ in P_{01}^{PA}, $q_0^* = p_2 q_2 / p_0$ in P_{02}^{PA} usw. Abgesehen davon, dass es sich bei q_{i0}^* (oder einfach q_0^*) um eine auf 0 bezogene Mengen handelt, die sich aufgrund von Ausgaben zu einem *späteren* Zeitpunkt t definieren[24], spielt es offenbar für die Größe dieser Mengen auch eine Rolle, wie weit t in der Zukunft liegt, wieviel später also t ist. Es ist mithin zweifelhaft ob P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} wirklich "sachlogisch" auf der gleichen Stufe stehen.

Damit zeigt sich übrigens erneut, dass es nicht sinnvoll ist Perioden, wie 0 und t, oder Variablen, wie Preise und Mengen als austauschbar ("umkehrbar") zu betrachten. Es wird gerne übersehen, dass diese Dinge *nicht* jeweils auf der gleichen Stufe stehen.

3. Formale Eigenschaften der Indizes von Neubauer

Die Indizes P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} erfüllen viele Axiome, wie Kommensurabilität, Dimensionalität, Proportionalität (und damit auch Identität) oder lineare Homogenität, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll. Interessant sind eher Fälle, in denen von anderen Indexformeln (selbstverständlich) erfüllte Eigenschaften *nicht* gelten.

a) Mittelwert, deshalb schwache, nicht aber auch strenge Monotonie

Wenn die Formeln P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} in indextheoretischen Schriften überhaupt erwähnt werden dann vorwiegend im Zusammenhang mit etwas ausgefallenen Eigenschaften. Als Mittelwerte

[24] In Fußnote 10 haben wir diese Mengen deshalb auch als dubios bezeichnet.

von Preismesszahlen sind sie notwendig schwach monoton, nicht aber – anders als die meisten anderen Indizes dieses Typs – auch streng monoton. P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} sind beliebte Beispiele dafür, dass starke Monotonie nicht aus schwacher folgt (wohl aber umgekehrt), und dass die beiden Bedingungen (Gl. 9 und 10), mit denen starke Monotonie definiert ist, nicht unabhängig sind[25]. P_{0t}^{PA} ist z. B. nicht streng monoton in Preisen der Berichtsperiode t, denn

(9) $$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t^*,\mathbf{q}_t) > P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) \quad \text{wenn } \mathbf{p}_t^* \geq \mathbf{p}_t,$$

gilt nicht notwendig, wohl aber ist

(10) $$P(\mathbf{p}_0^*,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) < P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) \quad \text{wenn } \mathbf{p}_0^* \geq \mathbf{p}_0.$$

erfüllt, d.h. P_{0t}^{PA} ist streng monoton nur in Preisen der Basisperiode 0, nicht auch der Berichtsperiode t. Für P_{0t}^{HB} gilt das Gegenteil (also Gl. 10 gilt, nicht notwendig aber auch Gl. 9). Dabei bedeutet $\mathbf{p}_t^* \geq \mathbf{p}_t$, dass wenigstens ein Element des nichtnegativen Preisvektors $\mathbf{p}_t^*$, etwa p_{it}^* größer ist als das entsprechende Element in $\mathbf{p}_t$ ($\mathbf{p}_0^* \geq \mathbf{p}_0$ ist analog definiert). Nach Gl. 9 und 10 sollte ein streng monotoner Preisindex P( ) mit $\mathbf{p}_t^* \geq \mathbf{p}_t$ (oder $\mathbf{p}_0^* \geq \mathbf{p}_0$) größer (kleiner) sein als ein Preisindex mit Preisen $\mathbf{p}_t$ (bzw. $\mathbf{p}_0$). Weniger anspruchsvoll ist

(9a) $$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) > P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_t) \quad \text{wenn } \mathbf{p}_t \geq \mathbf{p}_0 \text{ und}$$

(10a) $$P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) < P(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_t), \text{ wenn } \mathbf{p}_t \leq \mathbf{p}_0,$$

was auch schwache Monotonie[26] genannt wird. Beispiele, wie das folgende, die zeigen, dass P_{0t}^{PA} Gl. 9 oder P_{0t}^{HB} Gl. 10 *nicht* erfüllt (wohl aber beide Indizes Gl. 9a und 10a erfüllen) sind nicht einfach zu finden und sie wirken auch etwas an den Haaren herbeigezogen.[27]

Beispiel

Man berechne den Index von Palgrave mit nur zwei Waren und den folgenden Vektoren:
$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix},\ \mathbf{p}_t = \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, \text{ und alternativ } \mathbf{p}_t^* = \begin{bmatrix} 31 \\ 25 \end{bmatrix} \text{ oder } \mathbf{p}_t^{**} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Man erhält für den Index $P_{0t}^{PA} = \sum \frac{p_t}{p_0} \frac{p_t q_t}{\sum p_t q_t}$ folgende Ergebnisse:

$P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t,\mathbf{q}_t) = \frac{30}{80} \cdot \frac{120}{320} + \frac{25}{20} \cdot \frac{200}{320} = 0{,}92188$ und P_{0t}^{PA} berechnet mit $\mathbf{p}_t^*$ statt mit $\mathbf{p}_t$

$P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^*,\mathbf{q}_t) = \frac{31}{80} \cdot \frac{124}{324} + \frac{25}{20} \cdot \frac{200}{324} = 0{,}91991$, was entgegen Gl. 9 nicht größer, sondern kleiner ist als 0,92188. Rechnet man dagegen mit $\mathbf{p}_t^{**}$, so erhält man $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_t^{**},\mathbf{q}_t) =$ 0,96159 > 0,92188 ganz im Sinne von Gl.9.

---

[25] Unabhängigkeit liegt vor, weil Gl. 10 erfüllt sein kann, nicht aber auch Gl. 9 (Beispiel PA-Index) oder umgekehrt Gl. 9, aber nicht auch Gl. 10 (Beispiel HB-Index).

[26] Man beachte, dass auch die beiden Ungleichungen (Gl. 9a und 10a) unabhängig sind und dass ihnen nur eine Ungleichung im Falle der strengen Monotonie entspricht (nämlich Gl. 9). $P_{max} = \max(p_t/p_0)$ erfüllt nur Gl. 9a, nicht aber auch 10a, und entsprechend erfüllt $P_{min} = \min(p_t/p_0)$ nur Gl. 10a, nicht aber auch 9a.

[27] In der Praxis, bzw. in allen "normalen" Situationen dürfte eine Verletzung von Axiomen durch den PA- oder HB-Index nicht sehr wahrscheinlich sein.

Das Beispiel soll auch die Möglichkeit aufzeigen, dass wie $P_{0t}^{P} > P_{0t}^{L}$ auch $P_{0t}^{PA} > P_{0t}^{HB}$ gelten kann: mit $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ und den Vektoren $\mathbf{q}_t$, $\mathbf{p}_0$ und $\mathbf{p}_t$ wie oben erhält man [28]

$P_{0t}^{P} = 2/3 = 0{,}67 > P_{0t}^{L} = 17/36 = 0{,}4722$ und $P_{0t}^{PA} = 295/320 = 0{,}921875 > P_{0t}^{HB} = 0{,}4066265$.

Der Grund für die mögliche Verletzung von Gl. 9 bei P_{0t}^{PA} ist einfach: $p_t^* > p_t$ beeinflußt bei P_{0t}^{PA} beides, Preismesszahlen *und* Gewichte (bei P_{0t}^{HB} aber *nur* die Preismesszahlen).

b) Keine Linearität (Additivität) der Indexfunktion

Die Indizes P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} sind nicht nur Beispiele dafür, dass es Indizes gibt, die Mittelwerte von Preismesszahlen darstellen, nicht aber strikte Monotonie erfüllen[29], sondern auch dafür, dass nicht jeder Mittelwert von Preismesszahlen auch "additiv",[30] oder besser "linear" (in den Preisen) ist. Die Preisindexfunktion P(...) ist linear genau dann, wenn[31] gilt

(11) $$P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t^*) = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t) + P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t^+) = A + B \qquad \text{wenn } \mathbf{p}_t^* = \mathbf{p}_t + \mathbf{p}_t^+, \text{ und}$$

(12) $$\frac{1}{P(\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_t)} = \frac{1}{P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_t)} + \frac{1}{P(\mathbf{p}_0^+, \mathbf{p}_t)} = \frac{1}{C} + \frac{1}{D} \qquad \text{wenn } \mathbf{p}_0^* = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_0^+.$$

Während es bei der Monotonie nur darum geht, daß der Index die *Richtung* der Preisveränderung (Steigen/Fallen) richtig angibt, geht es hier um das *Ausmaß* der angezeigten Preisveränderung. Man kann leicht verifizieren, dass beide Bedingungen, Gl. 11 und 12 für die Indizes von Laspeyres und Paasche gelten. Sie lassen sich übrigens auch ausdrücken als

(13) $$P_{0t} = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{p}_t}{\mathbf{b}'\mathbf{p}_0}.$$

Eine Preisindexfunktion ist danach linear, wenn sie darstellbar ist als Quotient von Skalarprodukten mit den Preisvektoren $\mathbf{p}_t$ und $\mathbf{p}_0$ und den Zeilenvektoren $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$ (bei P_{0t}^{L} ist beispielsweise $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{q}_0'$ [konstant], oder bei P_{0t}^{P} ist $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{q}_t'$ [variabel mit veränderlichem t]), die als Gewichte fungieren (vgl. Gl. 6). Man sieht leicht, dass die Funktionen P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} nicht linear sind[32]. Für den Palgrave Index P_{0t}^{PA} müßte z.B. nach Gl. 11 gelten, dass

$$P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^*) = \left(\sum \frac{p_t q_t}{p_0} p_t + \sum \frac{p_t q_t}{p_0} p_t^+ + \sum \frac{p_t^+ q_t}{p_0} p_t + \sum \frac{p_t^+ q_t}{p_0} p_t^+ \right) \Big/ \left(\sum p_t q_t + \sum p_t^+ q_t \right)$$

gleich ist der Summe von

[28] Man beachte, dass die Gleichungen 3a und 3b nach wie vor erfüllt sind.

[29] Die Mittelwerteigenschaft impliziert zwar schwache *nicht* aber strikte Monotonie

[30] Der Begriff ist mehrdeutig: er kann bedeuten 1. Additivität (besser: Aggregierbarkeit) der *Indexfunktion* (vgl. unten Abschn. c), wovon Linearität im Sinne von Gl. 11 bis 13 ein Spezialfall ist, und 2. Additivität der mit einem entsprechenden Preisindex gewonnenen Volumen, was wir strukturelle Konsistenz (der *Volumen*) nennen wollen und was eine äußerst restriktive Forderung ist, die überhaupt nur von dem direkten Paasche Preisindex als Deflator erfüllt wird (vgl. hierzu v. d. Lippe 1999).

[31] Auch hier gilt wieder, dass die beiden Bedingungen unabhängig sind.

[32] Andere Beispiele für Indizes, die Mittelwerte von Preismesszahlen sind aber nicht auch linear in den Preisen sind, sind die Indizes DP^{L} oder das quadratische Mittel der Preismesszahlen P^{QM}.

$P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t) = \sum \frac{p_t q_t}{p_0} p_t \Big/ \sum p_t q_t$ und $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^+) = \sum \frac{p_t^+ q_t}{p_0} p_t^+ \Big/ \sum p_t^+ q_t$, was jedoch keineswegs erfüllt sein muß. Für ein leicht modifiziertes Beispiel mit $\mathbf{p}_t^* = \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \end{bmatrix}$ erhält man $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^*) =$ 0,95919, $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^*) =$ 0,92188 (wie oben) und $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^+) =$ 0,03750 (der Unterschied ist, wie so oft nicht sehr groß, denn $P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t^*) - P_{0t}^{PA}(\mathbf{p}_t) =$ 0,03731 statt 0,03750, aber die Forderung ist nun einmal nicht erfüllt).

Das zeigt übrigens auch, dass P_{0t}^{PA} noch nicht einmal Additivität in einem schwächeren Sinne erfüllt, wonach gilt " if all prices are increased by the same amount, the index of the new prices should equal to the old index number plus the index number of the constant amount"[33]. Das läuft darauf hinaus, einen Preisvektor $\mathbf{p}_t^+$ zu postulieren, der aus Konstanten b besteht, also $\mathbf{p}_t^+ = \begin{bmatrix} b \\ \dots \\ b \end{bmatrix}$, in obiger Rechnung $\mathbf{p}_t^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, und man könnte ganz analog in Gl. 12 auch einen Vektor $\mathbf{p}_0^+$ annehmen, der aus Konstanten c besteht. Für B in Gl. 11 erhält man beispielsweise im Falle von P_{0t}^{L} den Wert $B = b\frac{\sum q_0}{\sum p_0 q_0}$.

Man erkennt, dass demgegenüber die Indizes P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} (wie übrigens z.B. auch Fisher's Index P_{0t}^{F}) die Bedingungen der Gl. 11 und 12 (und damit auch 13) *nicht* erfüllen, noch nicht einmal in der speziellen Form von bei allen Waren gleichen Preisveränderungen um b oder um c. Bei P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{HB} (oder auch P_{0t}^{F}) besteht also kein enger Zusammenhang zwischen der Zunahme einzelner Preise und der Zunahme des Indexes insgesamt wie er bei linearen Indizes besteht.[34]

c) Mittelwert, deshalb auch aggregative Konsistenz der Indexfunktion

Von Additivität im Sinne von Gl. 11 - 13 ist *aggregative Konsistenz* (AK, auch Aggregier- oder Zerlegbarkeit[35] genannt) der Indexformel zu unterscheiden.[36] Danach soll es möglich sein, eine Indexfunktion[37] für das Gesamtaggregat aus den entsprechenden (mit gleicher Funktionsform bestimmten) Indizes für die Teilaggregate zu errechnen, ohne dass dafür mehr Daten erforderlich sind als die Werte für die Teilaggregate zur Basis- und/oder Berichtszeit. Die Funktion P_{0t}^{HB} muss also in gleicher Weise als gewogenes harmonisches Mittel (mit entsprechend analog definierten Gewichten) der K Teilindizes $P_{0t}^{HB}(k)$ für k = 1, 2, ..., K Teilaggregate wie der n Preismesszahlen darstellbar sein. Das gilt entsprechend für P_{0t}^{PA} als arithmetisches Mittel. Wie man leicht sieht, ist das erfüllt.

---

33 Pfouts (1966) S. 176.

34 Genau darin liegt der Wert der Eigenschaft "Linearität" für die Interpretation: es besteht ein Zusammenhang zwischen einzelnen Veränderungen der Preise und der vom Index angezeigten Veränderung des Preisniveaus insgesamt.

35 Vgl. v. d. Lippe (1999), S. 389, 403, v. d. Lippe (2000), S. 78f.

36 Sieht man vom Index von Drobisch (ungewogenes arithmetisches Mittel von P^L und P^P wegen der nicht mit Ausgabenanteilen zusammenhängenden Gewichtung mit ½ und ½) ab, dürfte jede *lineare* Indexfunktion auch aggregierbar sein (AK), aber die Umkehrung gilt nicht. Beispiele hierfür sind die nichtlinearen Indizes HB, PA oder auch die in Fußnote 32 erwähnten Indizes DP^L (logarithmischer Laspeyres Index) und P^{QM}.

37 Das Kriterium soll für beliebige (auch in mehreren Stufen durchführbare) Disaggregationen von Preis- und Mengenindizes, bis hin zur Ebene der einzelnen Messzahlen gelten.

d) Was heißt "reiner Preisvergleich"?

Linearität ist eine Eigenschaft, die zu studieren sich lohnt, weil sie zur Definition des "reinen Preisvergleichs" (RP) herangezogen werden könnte, eines zu recht für sehr wichtig gehaltenen Prinzips. Umso erstaunlicher ist es, dass es bislang kaum gelungen ist, dieses Prinzip auf das sich auch Neubauer immer wieder beruft, exakt und eindeutig zu definieren. Es scheint offenbar mindestens vier Bedeutungen von RP zu geben:[38]

1. Ein Preisindex P_{0t} soll nur die Unterschiedlichkeit der Preise $p_{it} \neq p_{i0}$ zum Ausdruck bringen und nicht auch z.B. von Veränderungen der Mengen ($q_{it} \neq q_{i0}$) beeinflusst werden. In diesem Sinne wird auch gerne gesagt, dass sich Preisindizes in einer Folge P_{01}, P_{02}, P_{03}, ... allein durch die Preise unterscheiden sollten, so dass z.B. P_{0t}^{P} (oder auch P_{0t}^{PA}) dies nicht erfüllt, weil sich in der Folge

   $$P_{01}^{P} = \sum p_1 q_1 \Big/ \sum p_0 q_1 \text{ , } P_{02}^{P} = \sum p_2 q_2 \Big/ \sum p_0 q_2 \text{ , ...}$$

   auch die Unterschiedlichkeit der *Mengen* niederschlägt[39] (ganz anders z.B. in der entsprechenden Folge des HB-Indexes oder des Laspeyres Indexes

   $$\sum p_1 q_0 \Big/ \sum p_0 q_0 \text{ , } \sum p_2 q_0 \Big/ \sum p_0 q_0 \text{ ,...).}$$

2. P_{0t} sollte ein Mittel aus Preismesszahlen mit einer *konstanten* Gewichtung[40] (z.B. mit den Ausgabenanteilen der Basiszeit) sein[41]. Dann wäre P_{0t}^{HB} als *harmonisches* Mittel genauso RP wie P_{0t}^{L} als *arithmetisches* Mittel mit den [in jeder Periode t] *gleichen* Gewichten $p_0 q_0 / \sum p_0 q_0$). Nach diesem Kriterium würden P_{0t}^{P} und auch P_{0t}^{PA} erneut keinen RP darstellen weil sich die Gewichtung wegen der Preise und Mengen laufend ändert. Der Index P_{0t}^{AH} erfüllt Kriterium 1, aber nicht 2, weil sich dort die Gewichte $p_t q_0 / \sum p_t q_0$ wegen der in ihnen enthaltenen Preise laufend ändern.

3. Man könnte auch verlangen, dass P_{0t} *linear* in den Preisen der Basis- *und* der Berichtsperiode sein sollte, womit dann Preisindizes wie P_{0t}^{HB}, oder das geometrische Mittel DP_{0t}^{L} nicht konform mit RP wären (beides Indizes, die 1 und 2 erfüllen, nicht aber 3). Ausscheiden würden auch P_{0t}^{PA} und P_{0t}^{F} (Indizes, die weder 1und 2 noch 3 erfüllen). Andererseits wird aber nach diesem Kriterium der Paasche Preisindex P_{0t}^{P} als RP zugelassen.

4. Ein sehr restriktives Verständnis von RP wäre es, zu verlangen, dass P_{0t} *linear* in den Preisen im Sinne der Gl. 13 mit *konstanten* (für alle Perioden t gleichen) Gewichtsvektoren **a** und **b** sein sollte, so dass gilt $\mathbf{b}'\mathbf{p}_0 = K = \text{const}$. Im Falle von P_{0t}^{L} ist diese Konstante K

---

[38] Die folgenden vier Konzepte sind nur ein erster Versuch, RP zu definieren. Wird RP in einem etwas allgemeineren Sinne diskutiert, z.B. auch einschließlich des Kettenindexproblems so wären noch mindestens zwei weitere Bedeutungen von "rein" zu nennen: 1. P_{0t} sollte nur die beiden Perioden 0 und t zum Vergleich heranziehen und nicht auch von anderen Perioden abhängen (also z.B. nicht pfadabhängig sein), und 2. die preisbestimmenden Merkmale sollten möglichst konstant gehalten werden (ein "Vorteil" von Kettenindizes ist ja, dass nicht nur die Gewichte, sondern auch die Warenauswahl laufend geändert werden kann). Im Sinne der zweiten Bedeutung ist RP vor allem eine Absicherung gegenüber möglichen Manipulationen (und potenziellen Manipulationsvorwürfen) und somit gerade für die amtliche Statistik von unschätzbarem Wert.

[39] Es wird deshalb auch oft gesagt, dass aufeinanderfolgende Werte des Paasche Preisindexes (und das gilt natürlich auch für den Palgrave Index) nicht untereinander, sondern immer nur mit der Basisperiode vergleichbar seien. Der Paasche- und der Palgrave Index erfüllen somit nicht Kriterium 1 des RP.

[40] Auf die Mehrdeutigkeit des Begriffs "Gewichtung" im Zusammenhang mit Indizes wurde bereits hingewiesen.

[41] Offenbar impliziert Kriterium 2 auch Kriterium 1 (2 $\rightarrow$ 1, aber nicht umgekehrt 1 $\rightarrow$ 2), weil alle Indizes, die 2 erfüllen (wie der Laspeyres -, logarithmischer Laspeyres - und der HB-Index) auch 1 erfüllen. Der Index AH wäre ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung (1 $\rightarrow$ 2) nicht gilt.

einfach $K = \sum p_0 q_0$. Wenn dies gilt, dann sind die Elemente einer Folge von Preisindizes Linearkombinationen der Preise p_t. Die Folge ist im Falle von P^L_{0t}: $\sum p_{i1}c_i$, $\sum p_{i2}c_i$, ... mit $c_i = q_{i0}/K$ und t = 1, 2, ... sowie i = 1, 2,...n.[42]

Wenn Nr. 1 das Kriterium des "reinen Preisvergleichs" (RP) wäre, dann könnte man RP auch (am besten?) mit einem ungewogenen Preisindex erfüllen[43], in dem gar keine Mengen q_{it} oder q_{i0} vorkommen. Ganz im Sinne dieses Kriteriums lehnte Neubauer aber z.B. auch Indizes ab, in denen Mengen q_0 mit *variablen* Mengen q_t gemittelt werden oder entsprechend alternativ mit q_0 oder q_t gewichtete Indizes gemittelt werden.[44] Danach wäre dann aber auch P^{PA}_{0t} abzulehnen.

Gilt dies auch für P^{HB}_{0t}? Dieser Index ist auch nichtlinear, genauso wie P^{PA}_{0t} oder P^F_{0t}. Aufeinanderfolgende Werte von P^{HB}_{0t} sind keine Linearkombinationen von p_t, so dass auch bei P^{HB}_{0t} Kriterium 3 und 4 *nicht* erfüllt sind[45]. Selbst die reziproken Werte dieser Folge sind nicht Linearkombinationen von p_t sondern von den *reziproken* Preisen $1/p_t$, denn man erhält für $1/P^{HB}_{01}$, $1/P^{HB}_{02}$, ... die Ausdrücke $\sum \frac{1}{p_{i1}} c_i$, $\sum \frac{1}{p_{i2}} c_i$, ... mit den konstanten Gewichten $c_i = p^2_{i0} q_{i0}/K$. Man dürfte kaum sagen können, dass P^{HB}_{0t} im gleichen Maße RP darstellt wie z.B. der Index P^L_{0t}, der wohl der Inbegriff des RP ist. Die Mängel von P^{PA}_{0t} und P^{HB}_{0t} unter dem Aspekt des RP sind aber nichts gegen die Mängel des so vielgelobten Index P^F_{0t}, der *kein einziges* Kriterium des RP erfüllt, gleichwohl aber für viele das non plus ultra ist.

Es würde den Rahmen sprengen, hier im Detail auf zwei weitere wichtige Fragen einzugehen:

1. worin besteht der analytische Wert des RP, und
2. warum wird das Prinzip so gerne mißverstanden und vernachlässigt?

Nur soviel hierzu: ein Grund für die Verwendung konstanter Gewichte liegt nahe, wenn man sich fragt, warum man überhaupt Indizes berechnet und nicht einfach Verhältnisse von Durchschnitten. Die rechnerische Elimination von (vergleichsstörenden) Einflüssen trifft man allenthalben in der Statistik[46]. Die Aussage des RP wird damit allerdings in einem gewissen Sinne fiktiv, wie es jedoch die eines *jeden* Preisindexes (im Unterschied zum Wertindex) notwendig ist. Leider wird dies aber gerne vergessen, wie auch dass die Preisbereinigung und ähnliche Betrachtungen nicht weniger fiktiv sind,[47] und dass es man bei der Preisnotierung

---

[42] Auch dieses Kriterium Nr. 4 schließt nicht wenig sinnvolle Indizes aus. Es wird z.B. auch erfüllt von dem ungewogenen arithmetischen Mittel der Preismesszahlen (Carli's Index). Hier ist $c^{-1} = np_0$.

[43] Es ist offensichtlich, dass "reiner Preisvergleich" nicht bedeuten kann, dass andere Variablen als Preise überhaupt keine Rolle spielen dürfen, dass (deshalb?) nur ungewogene Preisindizes zugelassen sind, oder gar dass alle ungewogenen Preisindizes gleichermaßen diesem Prinzip Rechnung tragen.

[44] In Neubauer (1998) werden die Formeln von Marshall / Edgeworth und Fishers "Idealindex" explizit mit Hinweis auf RP abgelehnt: weil "die Indexveränderung sowohl von den Preisveränderungen als auch von den Mengenveränderungen abhängig" ist (S. 52), bzw. weil "keine Isolierung der Preisveränderungen und keine Eliminierung der Mengenveränderungen stattfindet (S. 53). Wegen dieses Kriteriums sind auch Kettenindizes und häufigere Aktualisierungen des Warenkorbs abzulehnen, weil in dem Maße, in dem diese Häufigkeit gesteigert wird, werden auch die Intervalle verkürzt, innerhalb derer RP (im Sinne von Kriterium 1) möglich ist.

[45] Die Elemente der Folge P_{01}, P_{02}, P_{03}, ...unterscheiden sich beim HB-Index in der Tat nur durch die Preise, so dass Kriterium 1, nicht aber Kriterium 4 erfüllt ist.

[46] Es ist auch typisch für die axiomatische Betrachtung: Uns sind keine Axiome bekannt, die etwas darüber aussagen, welchen Wert ein Index annehmen sollte, wenn sich alles mögliche gleichzeitig ändern darf, Preise, Warenauswahl, Mengen, Qualität, Art der Geschäfte usw.

[47] Jeder weiß, dass sich die Mengenkomponente des Sozialprodukts von 0 bis t ganz anders entwickelt hätte, wenn über den ganzen Zeitraum von 0 bis t tatsächlich stets die Preise von 0 geherrscht hätten. Nicht wenig fik-

einer einzelnen Ware sehr wohl auf Konstanz achtet, diese Selbstverständlichkeit aber irgendwie in Vergessenheit gerät, wenn es um einen Waren*korb* (also n > 1 Waren) geht.

e) Die impliziten Mengenindizes sind nicht proportional in den Mengen

Die von Neubauer eingeführten Preisindizes zeigen ein Ansteigen der Preise wenn für die Mengen[48] in Gl.1, bzw. 2 gilt: $q_t^* = \frac{p_0 q_0}{p_t} < q_0$, bzw. $q_0^* = \frac{p_t q_t}{p_0} > q_t$ was gilt bei $\frac{p_t}{p_0} > 1$. Das Konzept ist also: Preissteigerung wenn und insofern (implizite) Mengen in t gegenüber 0 abnehmen (bzw. in 0 gegenüber t zunehmen). Entsprechend könnte man auch Mengenveränderungen *indirekt* als Veränderung impliziter Preise (von "Sternchen-Preisen") konzipieren und somit die Mengenindizes Q_{0t}^{HB}, Q_{0t}^{PA} als Mittel aus Mengenmesszahlen definieren

(14a) $Q_{0t}^{HB} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum \frac{q_0}{q_t} p_0 q_0} = \frac{\sum q_0 p_0}{\sum q_0 p_t^*}$ und (14b) $Q_{0t}^{PA} = \frac{\sum \frac{q_t}{q_0} p_t q_t}{\sum p_t q_t} = \frac{\sum q_t p_0^*}{\sum q_t p_t}$

mit den impliziten Preisen[49] p_t^* und p_0^*. Eine Mengenzunahme $\frac{q_t}{q_0} > 1$ drückt sich dann in impliziten Preisen $p_t^* = \frac{p_0 q_0}{q_t} < p_0$ und $p_0^* = \frac{p_t q_t}{q_0} > p_t$ aus. Anders als beim Paar L/P (Laspeyres/Paasche) sind die Produkte $P_{0t}^{PA} Q_{0t}^{HB}$ und $P_{0t}^{HB} Q_{0t}^{PA}$ nicht gleich und sie sind auch nicht gleich dem Wertindex $V_{0t} = \sum p_t q_t / \sum p_0 q_0$ (was natürlich auch für $P_{0t}^{PA} Q_{0t}^{PA}$ und $P_{0t}^{HB} Q_{0t}^{HB}$ gilt)[50].

Noch bemerkenswerter ist aber wohl der folgende Sachverhalt[51]:

Die "Faktorantithese" des Preisindexes P_{0t}^{HB} (oder: der "Kofaktor" von P_{0t}^{HB}) $\tilde{Q}_{0t}^{HB} = V_{0t} / P_{0t}^{HB}$ erfüllt (anders als Q_{0t}^{HB}) *nicht Proportionalität* und damit auch *nicht Identität* in den Mengen. Das gleiche gilt für den analog definierten indirekten (Kofaktor-) Mengenindex $\tilde{Q}_{0t}^{PA}$.

Bei Proportionalität[52], d.h. wenn $q_t = \lambda q_0$ erhält man *nicht* $\tilde{Q}_{0t} = \lambda$, sondern

(15a) $\tilde{Q}_{0t}^{HB} = \lambda (P_{0t}^{L} / P_{0t}^{HB}) \neq \lambda$ und (15b) $\tilde{Q}_{0t}^{PA} = \lambda (P_{0t}^{P} / P_{0t}^{PA}) \neq \lambda$.

Bei Proportionalität der Mengen sind – wie gesagt – die Indizes HB und HH sowie PA und AH identisch, so dass man (auch wegen Gl. 4a und 4b) erhält $\tilde{Q}_{0t}^{HB} > \lambda$ und $\tilde{Q}_{0t}^{PA} < \lambda$. Das

---

tiv sind auch alle Betrachtungen, die auf Gleichheit des "Nutzens" abstellen. RP trägt auch dem Umstand Rechnung, dass es den meisten Menschen leichter fällt, die Gleichheit von Gütern festzustellen, als die Gleichheit des Nutzens, oder gedanklich nur eine Größe zu variieren statt gleichzeitig mehrere.

48 Das Subskript i ist, wie stets, auch hier weggelassen worden.

49 Die Vorstellung impliziter Preise (als Reaktion auf Mengenänderungen) ist sicher intuitiv noch weniger zugänglich als die impliziter Mengen ("Sternchen-Mengen"). Es mag Sinn machen, die Veränderung der Preise *indirekt* durch Veränderung von Mengen zu messen. Analog bei Mengenindizes vorzugehen, oder gar bei *beiden* Indizes *gleichzeitig* den indirekten Ansatz zu wählen dürfte jedoch wenig einleuchtend sein.

50 Das bedeutet, dass beim Paar HB/PA (wie auch beim Paar L/P) Faktorumkehrbarkeit nicht erfüllt ist, was jedoch nach unserer Auffassung kein Nachteil ist, weil die Relevanz dieses *sehr* restriktiven Kriteriums meist weit überschätzt wird. Das Paar HB/PA erfüllt allerdings anders als L/P auch nicht den schwächeren Produkttest.

51 Man könnte die soweit eingeführten Mengenindizes auch "direkte" Mengenindizes nennen.

52 Vgl. oben Fußnote 14

zeigt, dass die von Neubauer wieder in die Diskussion gebrachten Indizes HB und PA nicht als Deflatoren geeignet sind. Angenommen alle Mengen sind gleich geblieben ($\lambda = 1$), dann ist das Volumen bei Deflationierung mit P_{0t}^{HB} gegeben mit $\sum p_0 q_0 \cdot \tilde{Q}_{0t}^{HB} = P_{0t}^{L} \sum \frac{p_0}{p_t} p_0 q_0$, was sehr wohl $\neq 1$ sein kann. Im Zahlenbeispiel erhält man $V_{0t} = P_{0t}^{L} =$ 17/36 und wegen $\tilde{Q}_{0t}^{HB} = V_{0t} / P_{0t}^{HB} =$ 1,16137 erhält man eine Zunahme des Volumens von $\sum p_0 q_0 =$ 720 um 16% zu 836,15. Entsprechend führt Deflationierung mit P_{0t}^{PA} wegen $\sum p_0 q_0 \cdot \tilde{Q}_{0t}^{PA} = \sum \frac{p_t}{p_0} p_t q_0 =$ 215 zu einer Abnahme des Volumens um über 70% (!) von 720 zu 215 und das obgleich jeweils die Mengen *gleich* geblieben sind (!). Während sich in vielen anderen Fällen die Verletzung von Axiomen in Zahlenbeispielen meist nicht sehr gravierend auswirkt, haben wir hier, bei der fehlenden Proportionalität der "indirekten" Mengenindizes - eine weitere Kuriosität der Indizes PA und HB - schon eine erheblichere Abweichung von dem, was allein "sachlogisch" gerechtfertigt sein dürfte. [53]

f) Wachstumsraten , Schlussbemerkung

Auf einige Eigenschaften der Indizes wurde hier nicht eingegangen. So konnten wir z.B. keine Bestätigung für Aussagen von Neubauer[54] über die Größe der Wachstumsraten von P_{0t}^{HB} relativ zu P_{0t}^{L} (und entsprechend von P_{0t}^{PA} relativ zu P_{0t}^{P}) finden[55]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Betrachtung nehme man zwei Güter an, deren Preise mit konstanter Rate zunehmen, so dass $\lambda_i = p_{it} / p_{i,t-1} > 1$. Man erhält dann

$$(16) \qquad w_t^L = \frac{P_{0,t}^L}{P_{0,t-1}^L} = \lambda_1 g_{1t}^L + \lambda_2 g_{2t}^L \text{ mit } g_{it}^L = \frac{\lambda_i^{t-1} p_{i0} q_{i0}}{\sum \lambda_i^{t-1} p_{i0} q_{i0}} \text{ und}$$

$$(17) \qquad w_t^{HB} = \frac{p_{0,t}^{HB}}{p_{0,t-1}^{HB}} = \left(\frac{1}{\lambda_1} g_{1t}^{HB} + \frac{1}{\lambda_2} g_{2t}^{HB} \right)^{-1} \text{ mit } g_{it}^{HB} = \frac{p_{i0} q_{i0} / \lambda_i^{t-1}}{\sum p_{i0} q_{i0} / \lambda_i^{t-1}}.$$

Die Gewichte g_i^L verändern sich von Periode zu Periode zugunsten der Ware, deren konstante Preissteigerung größer ist. Ist $\lambda_1 > \lambda_2$ so wird g_1^L zunehmend größer und der Wachstumsfaktor w_t^L in Gl. 16 ist – entgegen Neubauers Feststellung – nicht nur größer als der Wachstumsfaktor w_t^{HB} in Gl. 17, sondern w_t^L strebt mit $t \to \infty$ auch gegen λ_1 (die stärkste Teuerungrate), also $w_t^L \to \lambda_1$ [56]. Für w_t^{HB} gilt jeweils das Gegenteil (Verschiebung zugunsten der sich weniger verteuernden Ware) und (wegen harmonischer Mittelung) $w_t^{HB} \to \lambda_2 < \lambda_1$.

---

[53] Gleichwohl ist auch eine geringe Abweichung streng genommen nun einmal eine Verletzung axiomatischer Forderungen. Die Formulierung zeigt, dass sich der Verfasser der Grenzen der axiomatischen Betrachtungsweise sehr wohl bewusst ist. Er geht aber mit seinen Vorbehalten nicht so weit wie Neubauer. Im Gegenteil, zur Beurteilung von Indexformeln haben wir nur wenige Instrumente und dieses ist nun einmal im Vergleich zur sog. "sachlogischen" Beurteilung (so wichtig Fragen der verbalen Interpretation auch sein mögen) zumindest sehr viel eher exakt, operational und entscheidbar.

[54] vgl. Neubauer (1999), S. 35. Dort ausgesprochene Vermutungen über die Wachstumsrate des Laspeyres Preisindex konnten wir nicht bestätigt finden .

[55] Der Verfasser hat die Absicht, eine etwas längere Fassung dieses Beitrages als "working paper" dem interessierten Leser zur Verfügung zu stellen, wobei dann auch auf diesen Aspekt weiter eingegangen wird.

[56] Dieser "Dominierungseffekt" ist auch der Grund dafür, dass der Laspeyres-Index ungern als Index des Außenwerts genommen wird. Die umgekehrte Dominierung durch die sich am wenigsten verteuernden Waren hat man bei einem harmonischen Mittel der Wachstumsfaktoren, d.h. gem. Gl. 17 beim HB-Index. Beim

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es sicher Eigenschaften der von Neubauer wieder ins Gespräch gebrachten Indizes P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} gibt, die unvorteilhaft sind, wozu insbesondere gehört, dass der Produkttest nicht erfüllt ist und dass die impliziten Mengenindizes keine Proportionalität in den Mengen besitzen, vielleicht auch die fehlende Linearität. Das sind jedoch geringe Mängel gegenüber dem "Idealindex" P_{0t}^{F} von Fisher, der mindestens genauso viele Mängel hat, wenn auch mehr auf anderen Gebieten. Es bleibt nur die ungewöhnliche Gestalt der Formeln und ihre Ausgabeninterpretation, die es erklären könnten, warum die Formeln so wenig beachtet werden. Aber auch in dieser Hinsicht ist P_{0t}^{F} nicht wirklich besser, und es ist vielleicht das überraschendste Ergebnis unserer Betrachtung, dass P_{0t}^{HB} und P_{0t}^{PA} gern unverdient schlecht und entsprechend P_{0t}^{F} unverdient gut beurteilt wird. Offenbar wird hier mit zweierlei Maß gemessen.

Literaturangaben

Lippe von der, Peter (1999), Kritik internationaler Empfehlungen zur Indexformel von Preisindizes in der amtlichen Statistik, Jahrbücher für NÖ und Statistik, Bd.218, H. 3+4, S. 385

Derselbe (2000), Der Unsinn von Kettenindizes, AStA Bd.84, S. 67-82

Neubauer, W. (1966), Über die Konstruktion, den Sinn und die Zwecke von Preisindexzahlen, in: A. Blind (Hrsg.), Umrisse einer Wirtschaftsstatistik, Hamburg 1966, S. 190 ff

Derselbe (1995), Konzeptionelle Vor- und Nachteile eines verketteten Verbraucherpreisindex, unveröffentlichtes Gutachten 29. 6. 1995.

Derselbe (1996), Preisstatistik, München, 1996.

Derselbe (1998), Preisindex versus Lebenshaltungskostenindex: Substitutionseffekte und ihre Messung, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 1998 (Bd. 217/1), S. 49 – 60

Derselbe (1999), Koreferat zu "Zur Abschätzung der statistischen Verzerrung in der deutschen Inflationsrate", in: Deutsche Bundesbank (Hrsg.), Zur Diskussion über den Verbraucherpreisindex als Inflationsindikator, Beiträge zu einem Workshop in der Deutschen Bundesbank, Diskussionspapiere 3/99 der Volkswirtschaftlichen Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Frankfurt/ Main, Mai 1999.

Pfouts, R. W. (1966), An Axiomatic Approach to Index Numbers, Review of the International Statistical Institute, Vol. 34/2, pp-174 – 815.

---

geometrischen Mittel in Gestalt des logarithmischen Laspeyres Index DP^L gibt es keinen Dominierungseffekt. Sein Wachstumsfaktor ist ein geometrisches Mittel der einzelnen Wachstumsfaktoren (gewogen mit den konstanten Ausgabenanteilen der Basisperiode). Deshalb ist auch DP^L (anders als P^L) sehr beliebt als Formel für einen Index des Außenwerts einer Währung.